高次桁のカプレカ変換１

平田　郁美

概要

３１桁までの整数についてカプレカ変換を実行し、すべての固定点とループを求めた。得られた固定点２５７個は１４の系列に分類される。各系列ともただ１つの種になる固定点を持ち、種になる固定点に特定の桁数字を加えることによって、他の固定点が次々に生成される。固定点の個数とループの個数は、桁数のべき乗で増加する。

１　はじめに

１９４９年インド人の数学者カプレカによって、不思議な整数の性質が報告された[1，2]。後にカプレカ変換、またはカプレカルーチンとよばれる下記の手順を繰り返すと、すべての桁数字が同じものを除いてどんな４桁の整数から出発してもカプレカ定数[注1]６１７４に到達する。

４桁のカプレカ変換

１）４桁の任意の整数を考える。ただし、すべての桁数字が同じものはのぞく。
２）１）の整数の桁数字を大きい順に並び替えて、その桁数字を用いてできる最大の整数を作る。
３）１）の整数の桁数字を小さい順に並び替えて、その桁数字を用いてできる最小の整数を作る。
４）大きい数２）から小さい数３）を引く。得られた整数を１）の整数に置き換えて、２）に戻る。

例として、２１３４を考える。

２）桁数字を大きい順に並べる	４３２１
３）桁数字を小さい順に並べる	１２３４
４）２）から１）を引く	３０８７
１）に戻って、	
２）桁数字を大きい順に並べる	８７３０
３）桁数字を小さい順に並べる	０３７８
４）引く	８３５２

以下同様の手順を繰り返す。上の例では

```
　８５３２　　　　　　７６４１
－２３５８　　→　－１４６７
　６１７４　　　　　　６１７４　　　・・・・・
```

となり、手順を繰り返すと差として得られる整数には６１７４だけが現れるようになる。すべての桁数字が同じものを除外した任意の４桁の整数についてカプレカ変換を実行すると、最初に与える整数（以下初期値とよぶ）によって、２）～４）の処理回数（以下計算回数とよぶ）は異なるが、最終的に６１７４だけが現れるようになる。

　他の桁の整数について同様の計算を行うと、次の結果が得られる。

３桁の整数の場合[3，4]

例）*１２３から始める*

```
　３２１　　　９８１　　　９７２　　　９６３　　　９５４　　　９５４
－１２３　　－１８９　　－２７９　　－３６９　　－４５９　　－４５９
　１９８　→　７９２　→　６９３　→　５９４　→　４９５　→　４９５　→・・
```

　計算を続けると、４９５→４９５→４９５→・・・のように、引き算の答えがいつも４９５になる。

２桁の整数の場合

例）*３５から始める*

```
　５３　　８１　　６３　　７２　　５４　　９０　　８１
－３５　－１８　－３６　－２７　－４５　－０９　－１８
　１８→　６３　→　２７　→　４５　→　０９　→　８１　→　６３　→

　６３　　７２　　５４　　９０　　８１
－３６　－２７　－４５　－０９　－１８
→　２７　→　４５　→　０９　→　８１　→　６３　→　２７　→　・・・
```

　計算を続けると６３→２７→４５→０９→８１→６３→２７→４５→・・・のように、引き算の答えは６３，２７，４５，０９，８１のループだけが現れる。

５桁の整数の場合

例１）*５１８４０から始める*

```
　８５４１０　　９８５３２　　９７４４３　　９６６４２
－０１４５８　－２３５８９　－３４４７９　－２４６６９
　８３９５２　→　７４９４３　→　６２９６４　→　７１９７３　→
```

　９７７３１　　９８５３２　　９７４４３　　９６６４２
－１３７７９　－２３５８９　－３４４７９　－２４６６９
→　８３９５２　→　７４９４３　→　６２９６４　→　７１９７３→　・・・

例２）*４１９７６から始める*

　９７６４１　　９８６２２　　９７５３３　　９６５４３
－１４６７９　－２２６８９　－３３５７９　－３４５６９
　８２９６２　→　７５９３３　→　６３９５４　→　６１９７４　→

　９７６４１　　９８６２２　　９７５３３　　９６５４３
－１４６７９　－２２６８９　－３３５７９　－３４５６９
→　８２９６２　→　７５９３３　→　６３９５４　→　６１９７４→　・・・

例３）*５１１０５から始める*

　５５１１０　　９５５５３　　９９９５４　　９５５５３
－０１１５５　－３５５５９　－４５９９９　－３５５５９
　５３９５５　→　５９９９４　→　５３９５５　→　５９９９４→　・・・

５桁の整数の場合は、次のうちどれか１つになる。

- ８３９５２，７４９４３，６２９６４，７１９７３　のループが現れる
- ８２９６２，７５９３３，６３９５４，６１９７４　のループが現れる
- ５３９５５，５９９９４　のループが現れる

　１）～４）の反復回数（以下計算回数とよぶ）はスタートする整数（以下初期値とよぶ）によるが、４桁の場合の６１７４のように１つの数（以下固定点とよぶ)、または５桁の場合の５３９５５，５９９９４のように、いくつかの数が同じ順番で現れる数のループ（以下ループとよぶ）のいずれかが現れる。固定点とループをあわせて、以下到達点とよぶ。初期値の種類に比べて到達点の種類ははるかに少ない。同様な計算を１５桁まで行って得られた結果を表１にまとめる。

	ループの数	周期	ループ構成
2桁	1	5	9→81→63→27→45
3桁	1	1	495
4桁	1	1	6174
5桁	3	2	53955→59994
		4	74943→62964→71973→83952
		4	63954→61974→82962→75933
6桁	3	1	631764
		1	549945
		7	851742→750843→840852→860832→862632→642654→420876
7桁	1	8	8429652→7619733→8439552→7509843→9529641→8719722→8649432→7519743
8桁	4	1	97508421
		1	63317664
		3	86526432→64308654→83208762
		7	86308632→86326632→64326654→43208766→85317642→75308643→84308652
9桁	3	1	864197532
		1	554999445
		14	865296432→763197633→844296552→762098733→964395531→863098632→965296431→ →873197622→865395432→753098643→954197541→883098612→976494321→874197522
10桁	8	1	9753086421
		1	6333176664
		1	9975084201
		3	8655264432→6431088654→8732087622
		3	8653266432→6433086654→8332087662
		3	8765264322→6543086544→8321088762
		3	9775084221→9755084421→9751088421
		7	8633086632→8633266632→6433266654→4332087666→8533176642→7533086643→ →8433086652
11桁	3	1	86431976532
		5	88431976512→87641975322→86541975432→86420987532→96641975331
		8	87331976622→86542965432→76320987633→96442965531→87320987622→96653954331→ →86330986632→96532966431
12桁	16	1	975330866421
		1	633331766664
		1	555499994445
		1	997530864201
		1	999750842001
		3	865332666432→643330866654→833320876662
		3	865532664432→643310886654→873320876622
		3	865552644432→643110888654→877320876222
		3	876532664322→654330866544→833210887662
		3	876552644322→654310886544→873210887622
		3	977510884221→977550844221→975510884421
		3	977530864221→975530864421→975310886421
		3	877652643222→655430865444→832110888762
		3	977750842221→975550844421→975110888421
		3	997750842201→997550844201→997510884201
		7	863330866632→863332666632→643332666654→433320876666→853331766642→ →753330866643→843330866652

表１：１５桁までのカプレカ変換に現れる固定点とループ

	ループの数	周期	ループ構成
13桁	5	1	8643319766532
		2	8733209876622→9665429654331
		5	8764209875322→9665419754331→8843209876512→9766419753321→8854319765412
		5	8643209876532→9664319765331→8843319766512→8764319765322→8654319765432
		5	8654209875432→9664209875331→9864319765311→8874319765212→8765419754322
14桁	27	1	97755108844221
		1	97533308666421
		1	63333317666664
		1	99753308664201
		1	99975308642001
		1	99997508420001
		3	86533326666432→64333308666654→83333208766662
		3	86555526444432→64311108888654→87773208762222
		3	86553326664432→64333108866654→87333208766622
		3	87776526432222→65554308654444→83211108888762
		3	97775308642221→97555308644421→97531108886421
		3	87765326643222→65543308665444→83321108887662
		3	97753308664221→97553308664421→97533108866421
		3	97753108864221→97755308644221→97553108864421
		3	87653326664322→65433308666544→83332108876662
		3	86555326644432→64331108886654→87733208766222
		3	87655326644322→65433108866544→87332108876622
		3	97755508444221→97551108884421→97775108842221
		3	97777508422221→97555508444421→97511108888421
		3	87655526444322→65431108886544→87732108876222
		3	65543108865444→87321108887622→87765526443222
		3	97775508442221→97555108844421→97751108884221
		3	99775308642201→99755308644201→99753108864201
		3	99775108842201→99775508442201→99755108844201
		3	99777508422201→99755508444201→99751108884201
		3	99977508422001→99975508442001→99975108842001
		7	86333308666632→86333326666632→64333326666654→43333208766666→85333317666642→ →75333308666643→84333308666652
15桁	8	1	864333197666532
		1	555549999944445
		2	873332098766622→966543296654331
		5	976654197543321→885432098765412→976642098753321→986543197654311→887432098765212
		5	865433197665432→864332098766532→966433197665331→884333197666512→876433197665322
		5	966432098765331→986433197665311→887433197665212→876543197654322→865432098765432
		5	987643197653211→887543197654212→876542098754322→966542098754331→986432098765311
		5	966543197654331→884332098766512→976643197653321→885433197665412→876432098765322

表１：１５桁までのカプレカ変換に現れる固定点とループつづき

５桁までの結果と同様に、初期値の自由度に比べて到達点の種類は少ない。特に、４桁の 6174 のような固定点は非常に少ない。また、偶数桁の整数に比べて、奇数桁の整数は到達点の種類が少ないことがわかる。

表１をみると、到達点に現れる整数には、規則的に似た数字の列が現れている。R.W.Ellis

と J.R.Lewis は偶数桁には、６１７４に $\frac{m-4}{2}$ 個の６と、$\frac{m-4}{2}$ 個の３を加えた固定点が現れることを発見した[5]。

例：　４桁　6174

　　　６桁　631764

　　　８桁　63317664

また彼らは、３の倍数３ｋの桁に、ｋ個の４，９，５が現れることを示した[5]。

例：　３桁　495

　　　６桁　549945

　　　９桁　554999445

Ellis らは、この性質から２６桁までの固定点を予測し、予測した固定点を初期値としてカプレカ変換を実行して、たしかに固定点になっていることを示した[5]。

カプレカ変換は、一つ一つの操作は単純であるが、非線形の変換であり、結果の予想が難しい。一方、到達点に現れる整数には美しい対称性が見られる。本稿では、高次桁の整数についてカプレカ変換を実行し、固定点やループに現れる整数の特徴、桁数と到達点の個数の関係を調べ、帰納的にカプレカ変換の本質を探る。

2　固定点に現れる整数の特徴

２～３１桁のすべての整数を初期値としてカプレカ変換を実行する。次数の高い桁の整数を計算をする場合は、計算時間と有効数字に問題が起こる。今回使用したＣ言語は、高速な数値計算が可能であるが、16 桁以上の整数はそのままでは扱えない。そこで、ｍ桁の整数をｍ個の数字からなる配列と定義し、２）～３）の桁数字の並び替えは配列要素の並び替えに、４）の引き算は、桁間の繰り下がりを考慮した配列の要素ごとの引き算に書き換えて実行させた。この方法であれば、計算時間と記憶容量以外には桁数の制限はうけない。

各桁について、初期値を最大値（ｍ桁の整数の場合は 10^m－１）から１まで、大きい順にカプレカ変換を実行し、新たな到達点を得たたびに、現れた固定点ないしループの値を記録した。桁数字を並び替えて同じ整数になる初期値は、すべて同じ到達点に達するので、それらのうち最も大きい整数１つを初期値として計算した。すべての桁数字が同じ数も除外する。

１章で述べたように、カプレカ変換は偶数桁と、奇数桁で得られる結果が大きく異なる。２～３０桁の偶数桁の結果を表２－１に、３～３１桁の奇数桁の結果を表２－２にまとめる。ループの種類が多いため固定点のみ数値を記載し、ループは個数のみ記載した。

表２－１　偶数桁のカプレカ変換に現れる固定点

number of digits	number of fixed points and loops	fixed points and number of loops	series name
2桁	1	number of loops = 1	
4桁	1	6174	(a)
6桁	3	631764	(a)
		549945	(h)
		number of loops =1	
8桁	4	97508421	(c)
		63317664	(a)
		number of loops =2	
10桁	8	9753086421	(c)
		6333176664	(a)
		9975084201	(c)
		number of loops =5	
12桁	16	975330866421	(c)
		633331766664	(a)
		555499994445	(h)
		997530864201	(c)
		999750842001	(c)
		number of loops =１１	
14桁	27	97755108844221	(d)
		97533308666421	(c)
		63333317666664	(a)
		99753308664201	(c)
		99975308642001	(c)
		99997508420001	(c)
		number of loops =２１	
１６桁	46	9775531088644221	(d)
		6333333176666664	(a)
		9753333086666421	(c)
		9977551088442201	(d)
		9975333086664201	(c)
		9997533086642001	(c)
		9999753086420001	(c)
		9999975084200001	(c)
		number of loops =３８	
１８桁	73	886644219977553312	(b)
		977553310886644221	(d)
		975333330866666421	(c)
		633333331766666664	(a)
		555554999999444445	(h)
		997755310886442201	(d)
		997533330866664201	(c)
		999775510884422001	(d)
		999753330866642001	(c)
		999975330866420001	(c)
		999997530864200001	(c)
		999999750842000001	(c)
		number of loops =６１	
２０桁	110	88664432199776553312	(b)
		97755333108866644221	(d)
		63333333317666666664	(a)
		97533333308666666421	(c)
		97775551108884442221	(e)
		99775533108866442201	(d)
		99753333308666664201	(c)
		99977553108864422001	(d)
		99975333308666642001	(c)
		99997755108844220001	(d)
		99997533308666420001	(c)
		99999753308664200001	(c)
		99999975308642000001	(c)
		99999997508420000001	(c)
		number of loops =９６	
２２桁	162	9775533331088666644221	(d)
		9777555311088864442221	(e)
		8866443321997766553312	(b)
		9753333333086666666421	(c)
		6333333333176666666664	(a)
		9977553331088666442201	(d)
		9975333333086666664201	(c)
		9977755511088844422201	(e)
		9997755331088664422001	(d)
		9997533333086666642001	(c)
		9999775531088644220001	(d)
		9999753333086666420001	(c)
		9999977551088442200001	(d)
		9999975333086664200001	(c)
		9999997533086642000001	(c)
		9999999753086420000001	(c)
		9999999975084200000001	(c)
		number of loops =１４５	
２４桁	231	977755533110888664442221	(e)
		977553333310886666644221	(d)
		633333333333176666666664	(a)
		555555549999999944444445	(h)
		886644333219977666553312	(b)
		975333333333086666666421	(c)
		997775553110888644422201	(e)
		997755333310886666442201	(d)
		997533333333086666664201	(c)
		999775533310886664422001	(d)
		999753333333086666642001	(c)
		999777555110888444222001	(e)
		999977553310886644220001	(d)
		999975333333086666420001	(c)
		999997755310886442200001	(d)
		999997533333086664200001	(c)
		999999775510884422000001	(d)
		999999753333086642000001	(c)
		999999975330866420000001	(c)
		999999997530864200000001	(c)
		999999999750842000000001	(c)
		number of loops =２１０	

number of digits	number of fixed points and loops	fixed points and number of loops	series name
26桁	318	97755333333108866666644221	(d)
		97775553331108886664442221	(e)
		97777555511108888444422221	(f)
		97533333333308666666666421	(c)
		63333333333331766666666664	(a)
		98876654422099877554332111	(g)
		88664433332199776666553312	(b)
		99777555331108886644422201	(e)
		99775533333108866666442201	(d)
		99753333333308666666664201	(c)
		99977755531108886444222001	(e)
		99977553333108866664422001	(d)
		99975333333308666666642001	(c)
		99997755333108866644220001	(d)
		99997533333308666666420001	(c)
		99997775551108884442220001	(e)
		99999775533108866442200001	(d)
		99999753333308666664200001	(c)
		99999977553108864422000001	(d)
		99999975333308666642000001	(c)
		99999997755108844220000001	(d)
		99999997533308666420000001	(c)
		99999999753308664200000001	(c)
		99999999975308642000000001	(c)
		99999999997508420000000001	(c)
		number of loops =2 9 3	
28桁	429	9887665443220998776554332111	(g)
		9777555333311088866664442221	(e)
		9777755555311108888644442221	(f)
		9775533333333108866666644221	(d)
		8866443333321997766666553312	(b)
		6333333333333176666666666664	(a)
		9753333333333308666666666421	(c)
		9977775555111088884444222201	(f)
		9977755533311088866644422201	(e)
		9977553333331088666666442201	(d)
		9975333333333086666666664201	(c)
		9988766544220998775543321101	(g)
		9997775553311088866444222001	(e)
		9997755333331088666664422001	(d)
		9997533333333086666666642001	(c)
		9999777555311088864442220001	(e)
		9999775533331088666644220001	(d)
		9999753333333086666666420001	(c)
		9999977553331088666442200001	(d)
		9999975333333086666664200001	(c)
		9999977755511088844422200001	(e)
		9999997755331088664422000001	(d)
		9999997533333086666642000001	(c)
		9999999775531088644220000001	(d)
		9999999753333086666420000001	(c)
		9999999977551088442200000001	(d)
		9999999975333086664200000001	(c)
		9999999997533086642000000001	(c)
		9999999999753086420000000001	(c)
		9999999999975084200000000001	(c)
		number of loops =3 9 9	

number of digits	number of fixed points and loops	fixed points and number of loops	series name
30桁	572	988766544332209987766554332111	(g)
		977775555331110888866444422221	(f)
		977553333333310886666666644221	(d)
		977755533333110888666664442221	(e)
		975333333333330866666666666421	(c)
		633333333333331766666666666664	(a)
		555555555499999999994444444445	(h)
		886644333333219977666666553312	(b)
		997775553333110888666644422201	(e)
		998876654432209987765543321101	(g)
		997777555531110888864444222201	(f)
		997755333333310886666666442201	(d)
		997533333333330866666666664201	(c)
		999777755551110888844442222001	(f)
		999777555333110888666444222001	(e)
		999775533333310886666664422001	(d)
		999753333333330866666666642001	(c)
		999887665442209987755433211001	(g)
		999977755533110888664442220001	(e)
		999977553333310886666644220001	(d)
		999975333333330866666666420001	(c)
		999997775553110888644422200001	(e)
		999997755333310886666442200001	(d)
		999997533333330866666664200001	(c)
		999999775533310886664422000001	(d)
		999999753333330866666642000001	(c)
		999999777555110888444222000001	(e)
		999999977553310886644220000001	(d)
		999999975333330866666420000001	(c)
		999999997755310886442200000001	(d)
		999999997533330866664200000001	(c)
		999999999775510884422000000001	(d)
		999999999753330866642000000001	(c)
		999999999975330866420000000001	(c)
		999999999997530864200000000001	(c)
		999999999999750842000000000001	(c)
		number of loops = 5 3 6	

表２－２　奇数桁のカプレカ変換に現れる固定点

number of digits	number of fixed points and loops	fixed points and number of loops	series name
3桁	1	495	(h)
5桁	3	number of loops = 3	
7桁	1	number of loops = 1	
9桁	3	864197532	(i)
		554999445	(h)
		number of loops = 1	
11桁	3	86431976532	(i)
		number of loops = 2	
13桁	5	8643319766532	(i)
		number of loops = 4	
15桁	8	864333197666532	(i)
		555549999944445	(h)
		number of loops = 6	
17桁	9	98765420987543211	(k)
		86433331976666532	(i)
		number of loops = 7	
19桁	11	9876543209876543211	(k)
		8643333319766666532	(i)
		9987654209875432101	(k)
		number of loops = 8	
21桁	16	987654332098766543211	(k)
		864333333197666666532	(i)
		555555499999994444445	(h)
		998765432098765432101	(k)
		999876542098754321001	(k)
		number of loops = 11	
23桁	25	98765433320987666543211	(k)
		98776554210988754432211	(n)
		86433333331976666666532	(i)
		87765443219997765543222	(p)
		99876543320987665432101	(k)
		99987654320987654321001	(k)
		99998765420987543210001	(k)
		number of loops = 18	
25桁	37	9876543333209876666543211	(k)
		9877655432109887654432211	(n)
		8643333333319766666666532	(i)
		9987654333209876665432101	(k)
		9987765542109887544322101	(n)
		9998765433209876654321001	(k)
		9999876543209876543210001	(k)
		9999987654209875432100001	(k)
		number of loops = 29	
27桁	58	888666444221999777555333112	(j)
		987654333332098766666543211	(k)
		987765543321098876654432211	(n)
		864333333333197666666666532	(i)
		555555554999999999444444445	(h)
		998776554321098876544322101	(n)
		998765433332098766665432101	(k)
		999876543332098766654321001	(k)
		999877655421098875443221001	(n)
		999987654332098766543210001	(k)
		999998765432098765432100001	(k)
		999999876542098754321000001	(k)
		number of loops = 46	
29桁	88	98776554333210988766654432211	(n)
		88866644432219997776555333112	(j)
		98765433333320987666666543211	(k)
		98777655542110988875444322211	(o)
		86433333333333197666666666532	(i)
		99877655433210988766544322101	(n)
		99876543333320987666665432101	(k)
		99987765543210988765443221001	(n)
		99987654333320987666654321001	(k)
		99998765433320987666543210001	(k)
		99998776554210988754432210001	(n)
		99999876543320987665432100001	(k)
		99999987654320987654321000001	(k)
		99999998765420987543210000001	(k)
		number of loops = 74	
31桁	132	9877655433332109887666654432211	(n)
		9876543333333209876666666543211	(k)
		9877765554321109888765444322211	(o)
		8643333333333331976666666666532	(i)
		8886664443322199977766555333112	(j)
		9987765543333210988766654432210 1	(n)
		9987654333333320987666666543210 1	(k)
		9987776555421109888754443222101	(o)
		9998776554332109887665443221001	(n)
		9998765433333209876666654321001	(k)
		9999877655432109887654432210001	(n)
		9999876543333209876666543210001	(k)
		9999987654333209876665432100001	(k)
		9999987765542109887544322100001	(n)
		9999998765433209876654321000001	(k)
		9999999876543209876543210000001	(k)
		9999999987654209875432100000001	(k)
		number of loops = 115	

表２－１，表２－２とも、１５桁以下について W. Schneider[6]の結果があり、完全に一致する。また、Ellis[5]らが予想したように、偶数桁には、６１７４に$\frac{m-4}{2}$個の６と３を加えた固定点が、３の倍数３ｋ桁には、ｋ個の４，９，５が現れている。

２－１．偶数桁の固定点の分類

表２－１の偶数桁の固定点を見ると、表れる数字の並びがよく似ている。似た数字の並びを持つ固定点をグループにしていくと、３１桁までの偶数桁に現れるすべての固定点１８２個は、下記（ａ）～（ｈ）の８系列に分類される。各系列とも種になる固定点に、決まった方法で桁数字を加えていくと他の固定点が生成される。８系列の中には、２桁ごとに同系列の固定点が１個ずつ現れる系列（ａ）～（ｂ）と、２桁ごとに同系列の固定点が数を増やしながら出現し、さらに６桁ごとに子の系列を生む系列（ｃ）～（ｇ)、３桁ごとに同系列の固定点が１個ずつ現れる系列（ｈ）がある。以下、ｍは桁数を表す。

（ａ）6174 を種にして、6174 に$\frac{m-4}{2}$個の 3 と 6 を加えた固定点の系列。４桁以上の偶数桁に１個ずつ現れる。Ellis らが報告した系列である[5]。

例： ４桁 6174

６桁 631764

８桁 63317664

・・・・・

（ｂ）886644219977553312 を種にして、886644219977553312 に$\frac{m-18}{2}$個の 3 と 6 を加えた固定点の系列。１８桁以上の偶数桁に１個ずつ現れる。

例： １８桁 886644219977553312

２０桁 88664432199776553312

２２桁 8866443321997766553312

（ｃ）97508421 を種にして、97508421 にα個の 3 と 6 と、β個の 9 と 0 を加えた固定点の系列。ここで、α＋β＝$\frac{m-8}{2}$。８桁以上の偶数桁に($\frac{m-8}{2}$+1)個ずつ現れる。

例： ８桁 97508421

１０桁 9753086421，9975084201

１２桁 975330866421，997530864201，999750842001

・・・・・

（d）97755108844221 を種にして、97755108844221 にα個の 3 と 6 と、β個の 9 と 0 を加えた固定点の系列。ここで、α＋β＝$\dfrac{m-14}{2}$。

種 97755108844221 は（c）の種 97508421 に 7,5,1,8,4,2 を１個ずつ加えた形になっている。１４桁以上の全桁に($\dfrac{m-14}{2}$＋1)個ずつ現れる。

例：　１４桁　97755108844221

１６桁　97755310886644221，997755108844220 1

１８桁　97755331088666444221，99775531088644220 01，999775510884422001

・・・・・

（e）97775551108884442221 を種にして、97775551108884442221 にα個の 3 と 6 と、β個の 9 と 0 を加えた固定点の系列。ここで、α＋β＝$\dfrac{m-20}{2}$。

種 97775551108884442221 は（c）の種 97508421 に 7,5,1,8,4,2 を２個ずつ加えた形になっている。２０桁以上の偶数桁に($\dfrac{m-20}{2}$＋1)個ずつ現れる。

例：　２０桁　97775551108884442221

２２桁　9777555311088864442221，9977755511088844422201

・・・・・

（f）97777555511108888444422221 を種にして、97777555511108888444422221 にα個の 3 と 6 と、β個の 9 と 0 を加えた固定点の系列。ここで、α＋β＝$\dfrac{m-26}{2}$。

種 97777555511108888444422221 は（c）の種 97508421 に 7,5,1,8,4,2 を３個ずつ加えた形になっている。２６桁以上の偶数桁に($\dfrac{m-26}{2}$＋1)個ずつ現れる。

例：　２６桁　97777555511108888444422221

２８桁　9777755553111088886444422221，9977777555511108888444422201

・・・・・

（g）98876654422099877554332111 を種にして、98876654422099877554332111 にα個の 3 と 6 と、β個の 9 と 0 を加えた固定点の系列。ここで、α＋β＝$\dfrac{m-26}{2}$。　２６桁以上の偶数桁に($\dfrac{m-26}{2}$＋1)個ずつ現れる。２６桁ではじめて登場する系列で、（c）に

7,5,1,8,4,2 を１個ずつ加えると（d）の系列になるように、３２桁以上に（g）に６つの数を加えた新しい系列が現れると予想する。今後アルゴリズムを改良して、さらに高次桁のカプレカ変換を実行したい。

例：　２６桁　98876654422099877554332111

　　　２８桁　9887665443220998776554332111，9988766544220998775543321101

　　　・・・・・

（h）495 を種にして、495 に $(m-1)$ 個の 5 と 9 と 4 を加えた固定点の系列。６桁以上の３の倍数 $m = 3k$ 桁（$k = 2,3,\cdots$）に１個ずつ現れる。Ellis らによって示された[5]。

例：　３桁　　495

　　　６桁　　549945

　　　１２桁　555499994445

　　　１８桁　555554999999444445

　　　・・・・・

２－２．奇数桁の固定点の分類

表２－２の奇数桁について、各桁の固定点に着目する。偶数桁の場合と同様に、固定点に表れる数字はよく似ている。似た数字の並びを持つ固定点同士をグループにしていくと、３１桁までの奇数桁に現れるすべての固定点７５個は、２－１で説明した３の倍数の桁に現れる（h）と下記の（i）～（p）の計７系列に分類される。以下mは桁数を表す。

（i）864197532 を種にして、864197532 に $\dfrac{m-9}{2}$ 個の 3 と 6 を加えた固定点の系列。９桁以上の奇数桁に１つずつ現れる。

例：

９桁　　864197532

１１桁　86431976532

・・・・・

２９桁　86433333333331976666666666532

（j）888666444221999777555333112 を種にして、888666444221999777555333112 に $\dfrac{m-27}{2}$ 個の 3 と 6 を加えた固定点の系列。２７桁以上の奇数桁に１つずつ現れる。

例：

２７桁　888666444221999777555333112

２９桁　88866644432219997776555333112

３１桁　8886664443322199977766555333112

（k）98765420987543211 を種にして、98765420987543211 にα個の 3 と 6 と、β個の 9 と 0 を加えた固定点の系列。ここで、α＋β＝$\frac{m-17}{2}$。　１７桁以上の奇数桁に($\frac{m-17}{2}$+1)個ずつ現れる。

例：　１７桁　98765420987543211

１９桁　9876543209876543211，9987654209875432101

２１桁　987654332098766543211，998765432098765432101，

999876542098754321001

・・・・・

（n）98776554210988754432211 を種にして、98776554210988754432211 にα個の 3 と 6 と、β個の 9 と 0 を加えた固定点の系列。ここで、α＋β＝$\frac{m-23}{2}$。　２３桁以上の奇数桁に($\frac{m-23}{2}$+1)個ずつ現れる。

偶数桁の（c）と（d）の関係と同様に、種 98776554210988754432211 は（k）の種 98765420987543211 に、7,5,1,8,4,2 を１個ずつ加えた形になっている。

例：　２３桁　98776554210988754432211

２５桁　9877655432109887654432211，9987765542109887544322101

２７桁　987765543321098876654432211，998776554321098876544322101，

999877655421098875443221001

・・・・・

（o）987776555421109888754444322211 を種にして、987776555421109888754444322211 にα個の 3 と 6 と、β個の 9 と 0 を加えた固定点の系列。ここで、α＋β＝$\frac{m-29}{2}$。２９桁以上の奇数桁に($\frac{m-29}{2}$+1)個ずつ現れる。

種 98777655542110988875444322211 は（k）の種 98765420987543211 に 7,5,1,8,4,2 を２個ずつ加えた形になっている。例として

２９桁　98777655542110988875444322211

３１桁　9877765554321109888765444322211，9987776555421109888754443222101

・・・・・

（p）２３桁の 87765443219997765543222。３１桁までの範囲では、２３桁のみに現れる。１つの桁だけに現れる固定点は、固定点２５７個のうち、これだけである。

３　桁数と到達点の個数の関係

３章では、桁ごとの到達点（固定点、ループ）の個数に注目し、到達点の個数と桁数の関係を調べる

３－１．桁数と到達点の個数の関係

横軸に桁数、縦軸に各桁の到達点の個数（固定点の個数＋ループの個数）をとって散布図を作ると、図３－１になる。桁数の増加とともに、固定点の個数も急激に増えている。べき関数、指数関数の２通りについて、回帰分析を行い、関数形の決定を試みる。図３－２に両対数のグラフを、図３－３に片対数のグラフを示す。べき乗に増加するときは両対数のグラフが、指数関数的に増加するときは片対数グラフが直線になる。

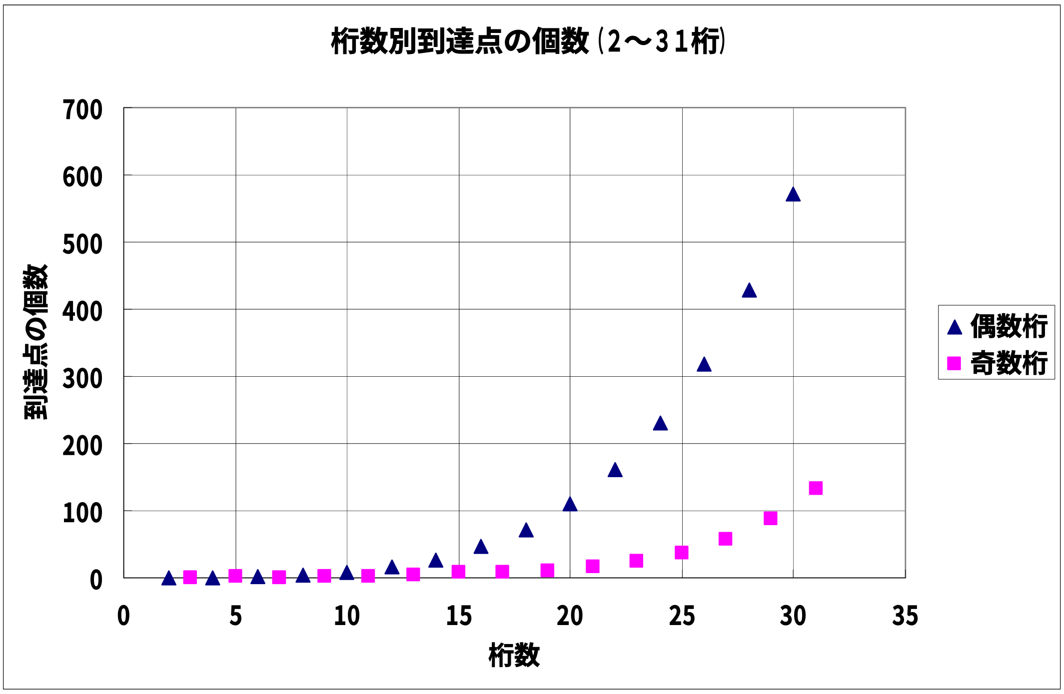

図３－１

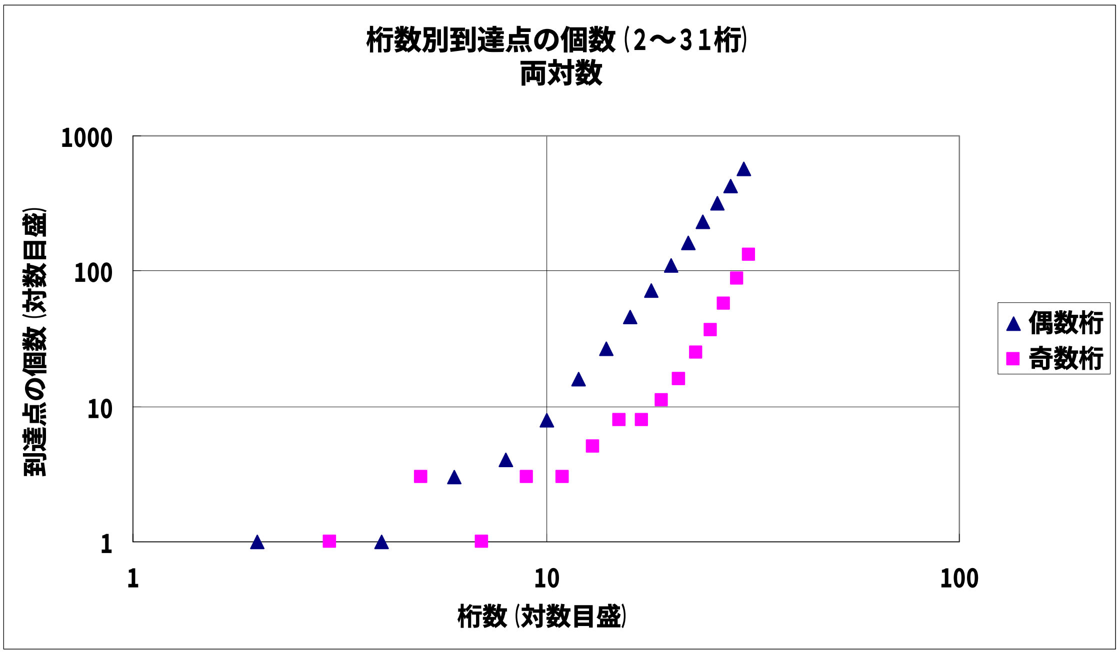

図３－２

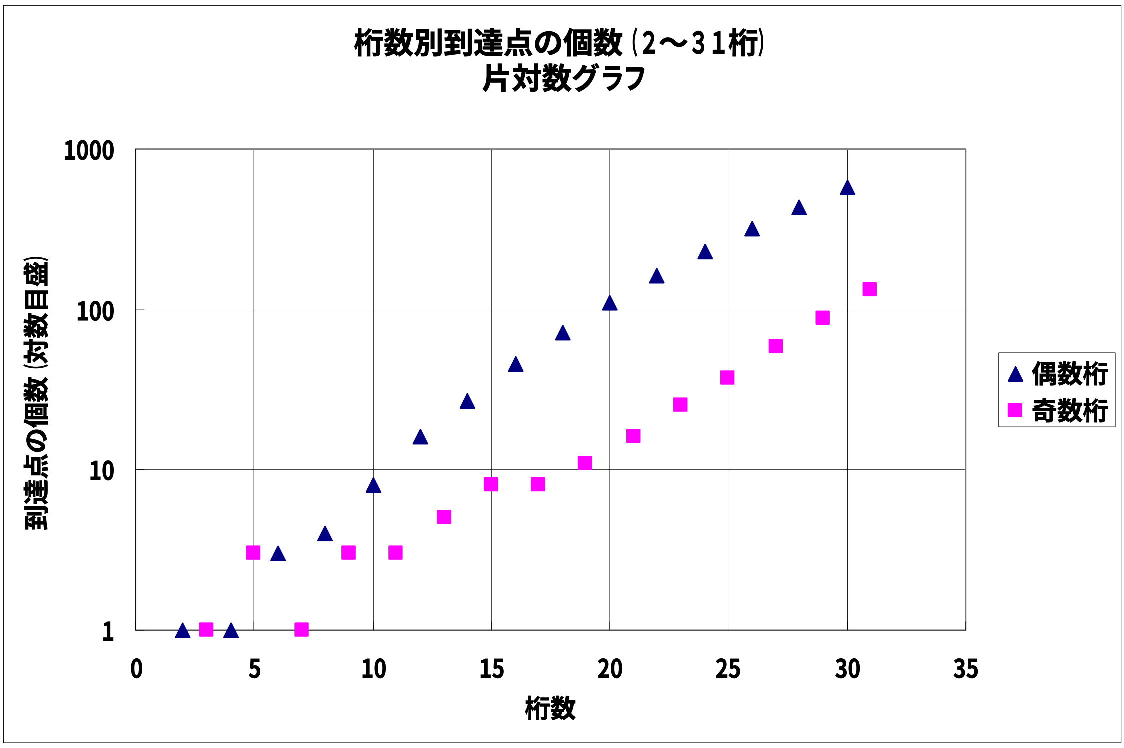

図３－３

偶数桁については、図３－２の両対数グラフは８桁から３０桁のデータ点についてきれいに直線上に並んでいる。８桁から３０桁の偶数桁のデータのみを両対数のグラフにする

と図３－４になり、データ点がきれいに直線上に乗っている。図３－４から得る回帰曲線は、桁数ｘと到達点の個数ｙとすると、$y = 0.0013x^{3.805}$ である。データ点が回帰曲線上に乗っている度合いを示すＲ２乗値は 0.9985 で、べき関数によくフィットしている。Ｒ２乗値は１に近づくほど、データ点が回帰曲線に乗っていることを示している。

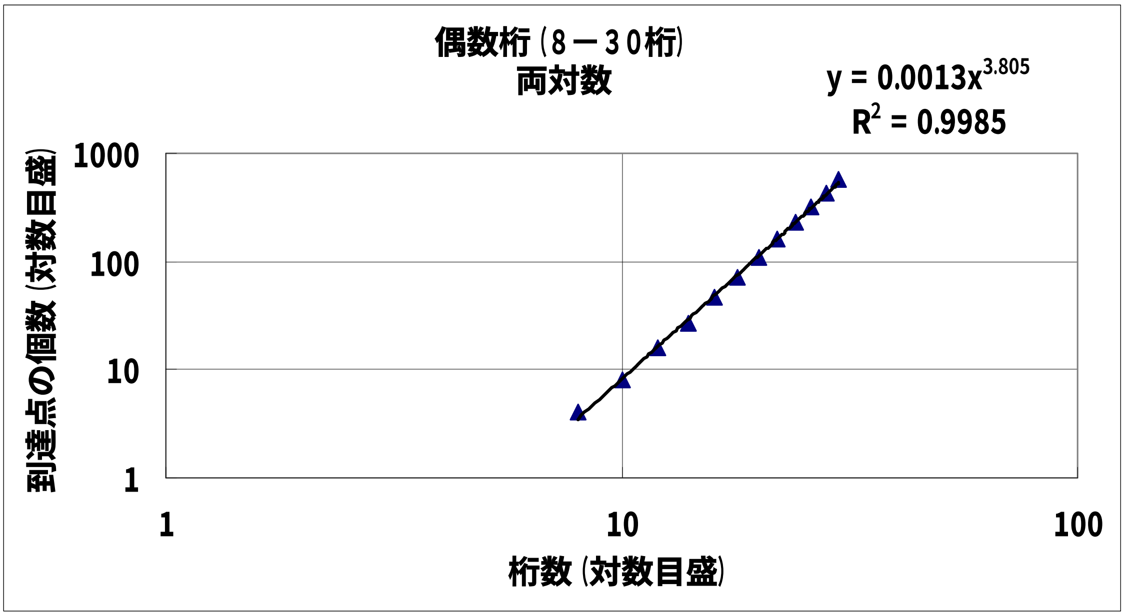

図３－４

なぜ、べき関数によくフィットするのであろうか。まず、桁数と初期値の個数の間にどのような関係があるかを調べる。カプレカ変換は桁数字の並び替えに対して対称であり、並び替えて同じ整数になる初期値からスタートすると、カプレカ変換の結果すべて同じ到達点を得る。従って、m桁のカプレカ変換の実質的な初期値は、(10^m-m)個ではなく、並び替えの自由度で割った数になる。桁ごとの実質的な初期値の数を、両対数グラフ図３－５に示す。図３－５にみるように、並び替えの自由度を削った初期値の種類は、桁数のべき関数で表される。特に、図３－４で桁数と到達点の個数の間の関数形の決定に使った８～３０桁のデータ点を抽出して図３－６にすると、データ点は非常によく直線上に並ぶ。回帰曲線は、$y = 0.0112x^{6.916}$, R2 値 は 0.9987 である。

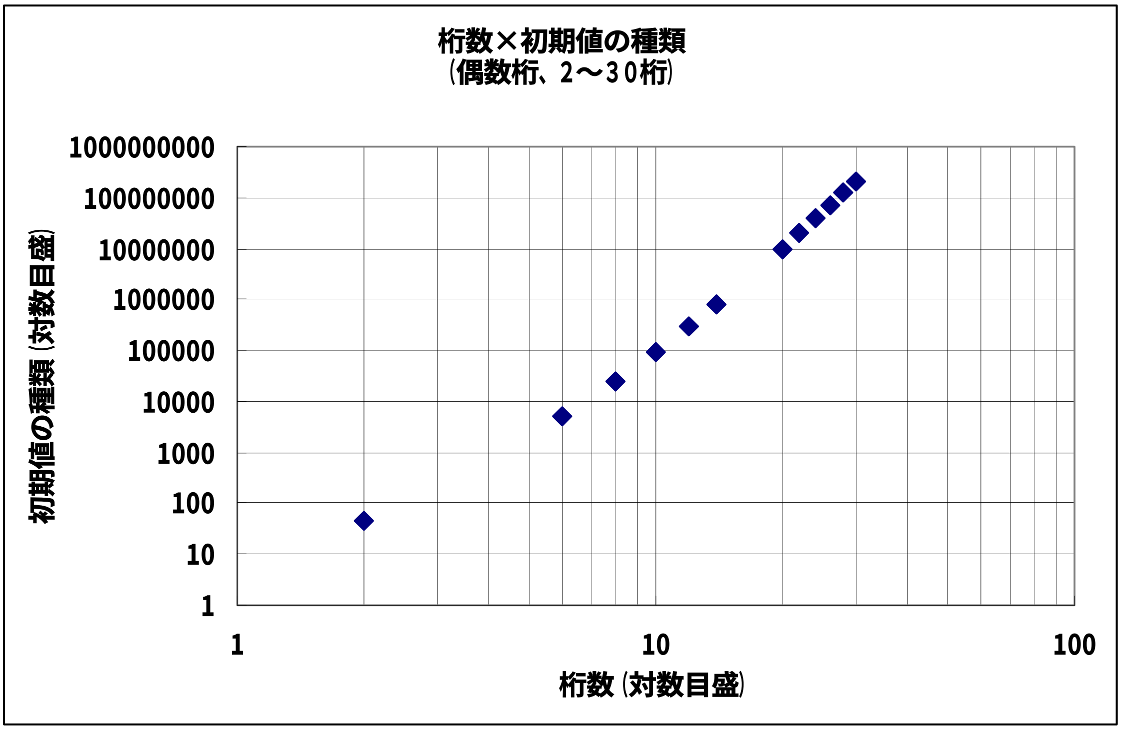
桁数×初期値の種類
(偶数桁、2〜30桁)
初期値の種類 (対数目盛)
1000000000
100000000
10000000
1000000
100000
10000
1000
100
10
1
1
10
100
桁数 (対数目盛)

図３－５

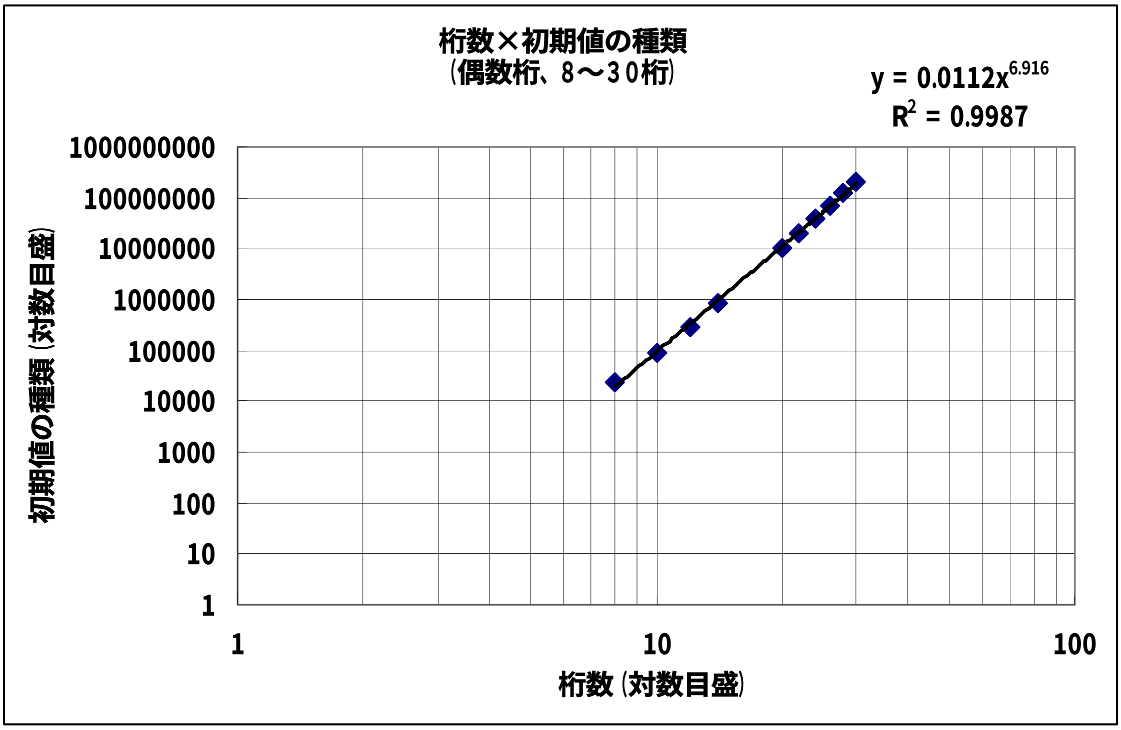
桁数×初期値の種類
(偶数桁、8〜30桁)
y = 0.0112x^6.916
R^2 = 0.9987
初期値の種類 (対数目盛)
1000000000
100000000
10000000
1000000
100000
10000
1000
100
10
1
1
10
100
桁数 (対数目盛)

図３－６

図３－６のように、m桁の初期値の個数は、桁数mの指数関数的に増加するのではなく、mのべき乗で増加している。図３－１でみたように、桁数と到達点の個数の回帰曲線がべき関数で与えられたのは、カプレカ変換の持つ桁数字の並べ替えに対する対称性から、取りうる初期値の個数が桁数のべき乗で増えているためと考えられる。

図３－１の奇数桁のデータは、２変数間の関係がはっきりしない。１７～３１桁のデータ点に注目すると、図３－２からべき関数、図３－３から指数関数のいずれにもある程度乗っている。べき関数にフィッティングを行うと、$y = 0.00001x^{4.7418}$（R２乗値= 0.9861)、指数関数にフィッティングを行うと $y = 0.2324\exp(0.204x)$（R2 乗値= 0.9986２）になる。いずれも直線に乗っているデータ点数が十分ではなく、さらに高次桁の計算が必要である。

３－２．桁数と固定点の個数の関係

横軸に桁数、縦軸に各桁の固定点の個数をとって散布図を作ると、図３－７になる。１章で述べたように、初期値の数に比べて固定点の数はかなり少ないが、桁数の増加とともに、固定点の個数も急激に増えている。べき関数、指数関数の２通りについて、回帰分析を行い、関数形の決定を試みる。図３－８に両対数のグラフを、図３－９に片対数のグラフを示す。べき乗に増加するときは両対数のグラフが、指数関数的に増加するときは片対数グラフが直線になる。

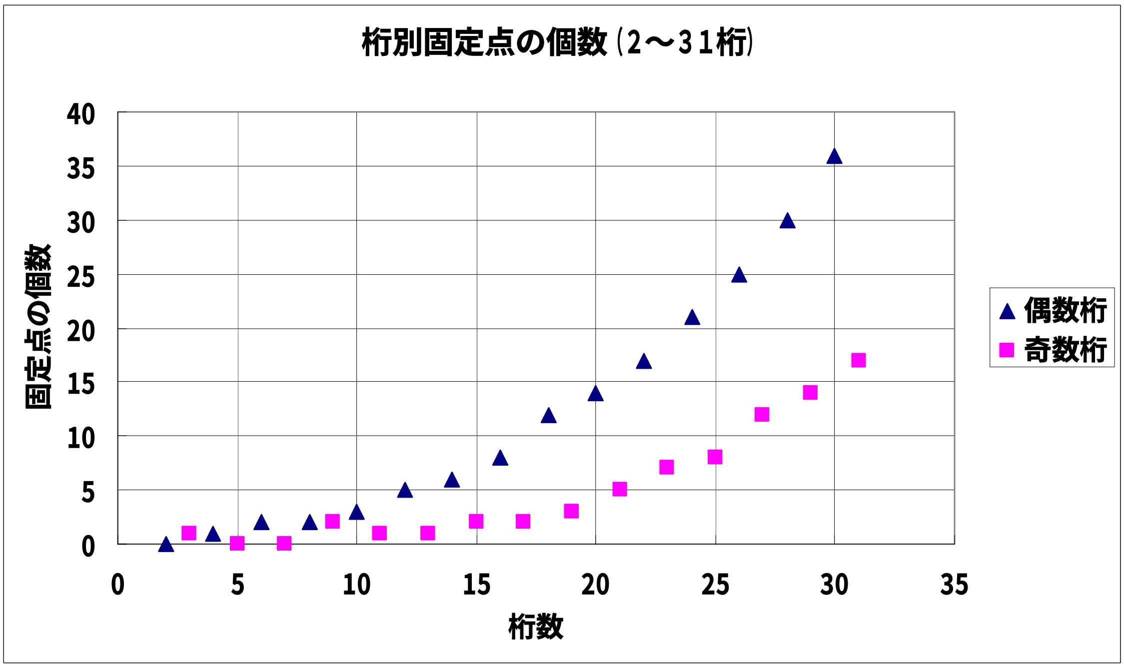

図３－７

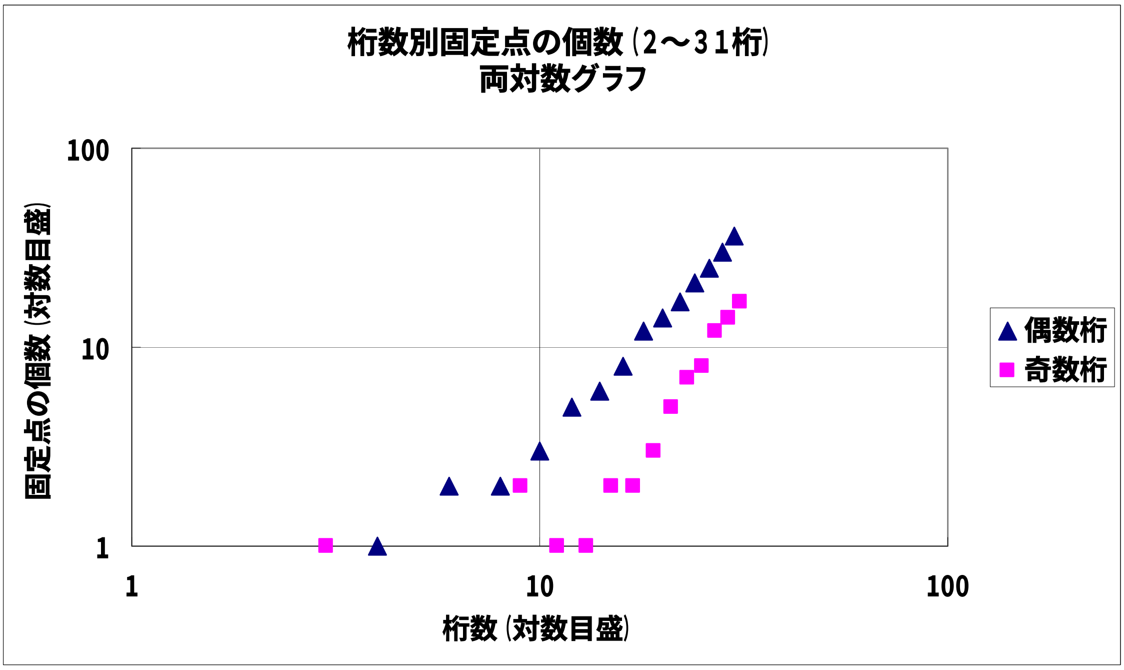

図３－８

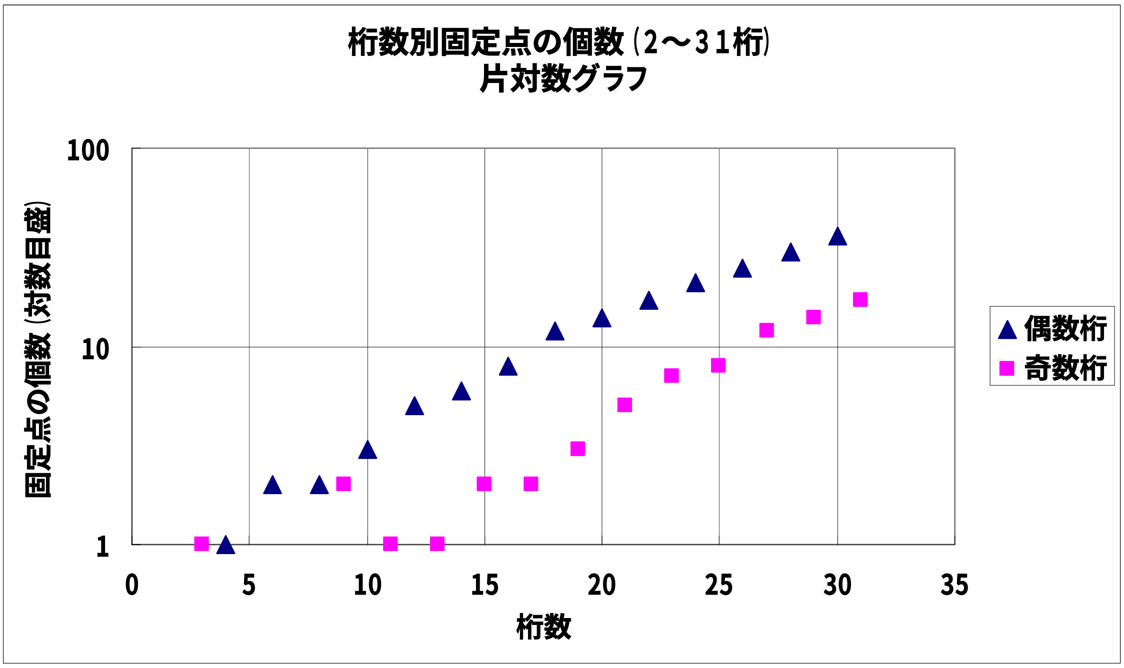

図３－９

偶数桁については、図３－８の両対数グラフは８桁から３０桁のデータ点についてきれ

いに直線上に並んでいる。８桁から３０桁の偶数桁のデータ点から回帰曲線を求める（図３－１０参照)。桁数ｘと固定点の個数ｙとすると、$y = 0.0201x^{2.183}$ である。Ｒ２乗値は 0.9968 で、べき関数によくフィットしている。R2 乗値は１に近づくほど、データ点が回帰曲線に乗っていることを示している。

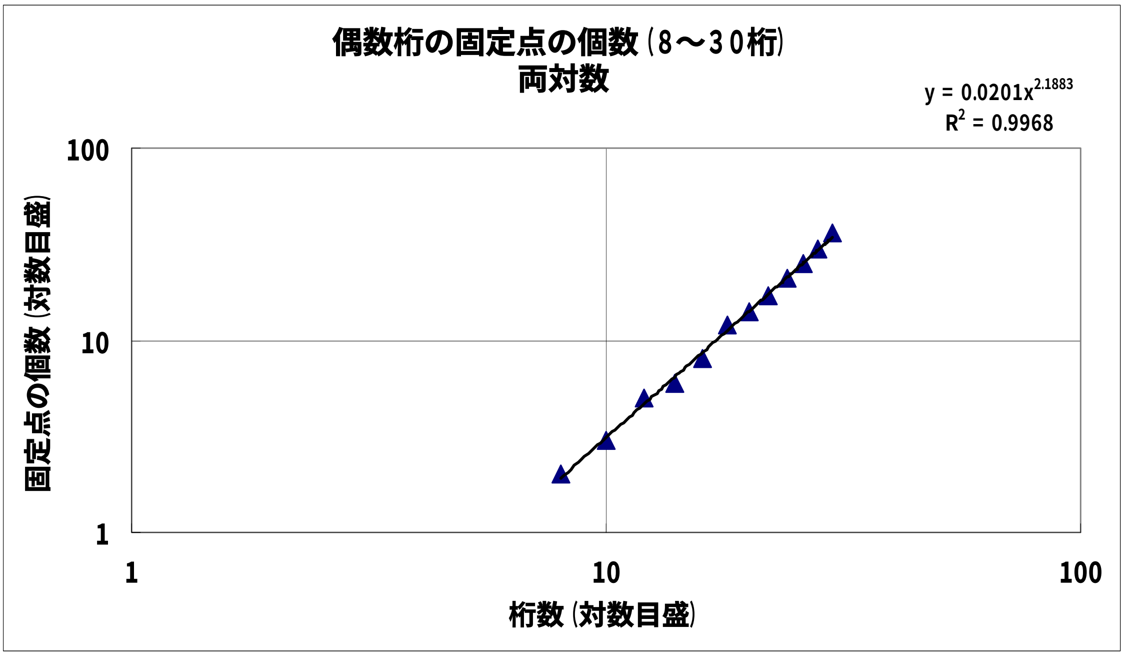

図３－１０

固定点の個数が桁数のべき乗で記述されるのは、なぜだろうか。３－１で考察したように、桁数とともに初期値がどのように増加するかを調べる。桁数字の並び替えによる重複を省いた初期値のなかから、カプレカ変換後に固定点に到達する初期値を取り出す。図３－１１に、桁数と固定点に到達する初期値の個数を両対数グラフに表す。

桁ごとの並び替えの自由度を省いた初期値全体の個数のグラフ（図３－５参照）に比べて、固定点に達するもののみ取り出した図３－１１のデータ点はかなりばらついている。べき関数にフィッティングを行うと、$y = 0.00006x^{7.6905}$，R^2 値 $= 0.9653$、指数関数にフィッティングを行うと、$y = 35.192\exp(0.456x)$，R^2 値$= 0.9734$ で、むしろ指数関数のほうによくフィットしている。カプレカ変換後に固定点になる初期値の個数は、べき関数的に増えているとは言えない。固定点の個数が桁数のべき乗で記述される理由は別にある。

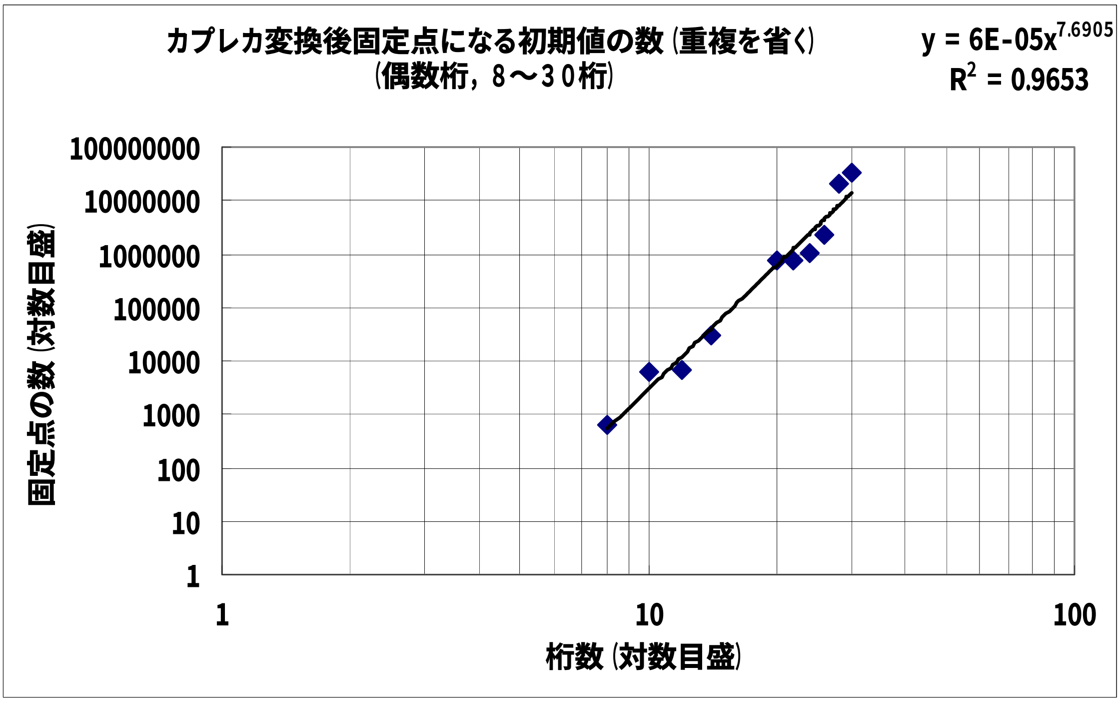

図３－１１

次に、２章で考察した固定点の系列のうち、急激に固定点になる初期値の数を増やしていくタイプの系列に注目する。表３－１に、３０桁までの偶数桁に現れる固定点の個数を２－１章の（ａ）～（ｈ）の７つの系列ごとに示す。

	系列別の固定点の個数								固定点の総数
桁数	(a) の系列	(b) の系列	(c) の系列	(d) の系列	(e) の系列	(f) の系列	(g) の系列	(h)の系列	
2									0
4	1								1
6	1							1	2
8	1		1						2
10	1		2						3
12	1		3					1	5
14	1		4	1					6
16	1		5	2					8
18	1	1	6	3				1	12
20	1	1	7	4	1				14
22	1	1	8	5	2				17
24	1	1	9	6	3			1	21
26	1	1	10	7	4	1	1		25
28	1	1	11	8	5	2	2		30
30	1	1	12	9	6	3	3	1	36

表３－１

偶数桁のカプレカ変換に現れる固定点は、６桁以下は、３の倍数桁に現れる系列（h）を除いて固定点の個数は１である。８桁で現れる（c）の系列は、桁数が増えるとともに１つずつ固定点の個数が増えるばかりでなく、６桁ごとに新しい系列（d）～（f）を生み出し、急激に固定点を増やしていく。図３－２において、８桁以上で桁数と桁ごとの固定点の個数の関係がべき関数になったのは、（c）～（f）の系列により固定点がべき上で増えるためと考えられる。また、図３－３において、１２桁と１８桁のデータ点が回帰直線からずれている。3の倍数桁１２，１８，２４，３０桁には（h）の系列の固定点が存在する。固定点の総数が少なく（h）の比率が高い１２，１８桁に、（h）の影響が大きく出たためと考えられる（表３－１参照）。

表３－１から、２６桁で（g）の系列が出現している。（c）の系列から類推して、（g）の種の固定点が、新しい系列を生成することが予想される。３２桁以上の固定点を求めると、両対数のグラフは現在の直線からずれてくるだろう。さらに高次桁のカプレカ変換を実行し、桁数と固定点の個数がべき関数で記述される仕組みを調べることが今後の課題である。

奇数桁では、図３－８，図３－９をみると、偶数桁に比べて直線に乗っている範囲が少ない。もっとも直線に近い１７～３１桁の範囲のデータ点を使って関数形を定める。べき関数にフィットすると $y = 0.0008x^{3.5769}$ （R2 乗値 = 0.9892)、指数関数にフィットすると $y = 0.1806\exp(0.1514x)$（R2 乗値 = 0.97）であり、べき関数により近い。

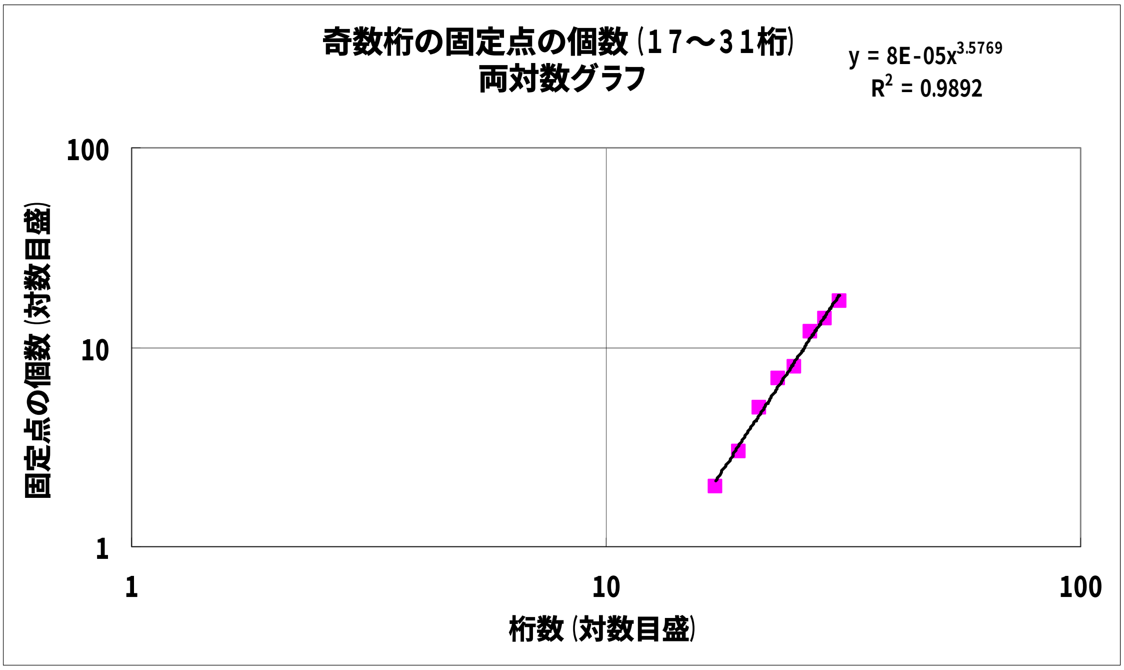

図３－１２

固定点の個数が桁数のべき乗で記述される理由を考える。偶数桁と同様に、桁数と固定点に到達する初期値の個数（並び替えの自由度を削ったもの）を両対数グラフに表すと、図３－１２に示すようにデータ点はかなりばらつき（$y = 239.63x^{3.183}$, R2 乗値 = 0.9415)、べき関数的に増えているとは言えない。

偶数桁と同様に、３１桁までの奇数桁に現れる固定点の個数を、２－２章の（ｈ）～（ｐ）の７つの系列ごと示す（表３－２参照)。

	系列別の固定点の個数							固定点の
桁数	⒤ の系列	⒥ の系列	⒦ の系列	⒩ の系列	⒪ の系列	⒫ の系列	⒣ の系列	総数
3							1	1
5								0
7								0
9	1						1	2
11	1							1
13	1							1
15	1						1	2
17	1		1					2
19	1		2					3
21	1		3				1	5
23	1		4	1		1		7
25	1		5	2				8
27	1	1	6	3			1	12
29	1	1	7	4	1			14
31	1	1	8	5	2			17

表３－２

表３－２にみるように、奇数桁のカプレカ変換に現れる固定点は、（ｈ）の系列を除外すると、１５桁以下では各系列とも固定点の個数は１である。１７桁で現れる（ｋ）の系列は、偶数桁の８桁で現れた（ｃ）の系列のように、桁数が増えるとともに１つずつ固定点の個数が増えるばかりでなく、６桁ごとに新しい系列を生み出していく。このため、奇数桁の両対数のグラフが１７桁以上で直線に近づき（図３－２参照)、べき関数が現れてくると考えられる。べき関数を生む（ｋ）のタイプの系列は１７桁で初めて出現し、３１桁までの範囲では固有値の中で占める割合が少ない。このため、奇数桁ではデータ点がばらついている。さらに高次桁のカプレカ変換を実行する必要がある。

３－２．桁数とループの個数の関係

横軸に桁数、縦軸に各桁のループの個数をとって散布図を作ると、図３－１３になる。固定点や、到達点（固定点とループの和）の場合と同様に、偶数桁、奇数桁とも、桁数とともに急激にループの個数が増加していく様子が見られる。図３－１４に、桁ごとのループの個数の両対数グラフを、図３－１５に片対数グラフを示す。

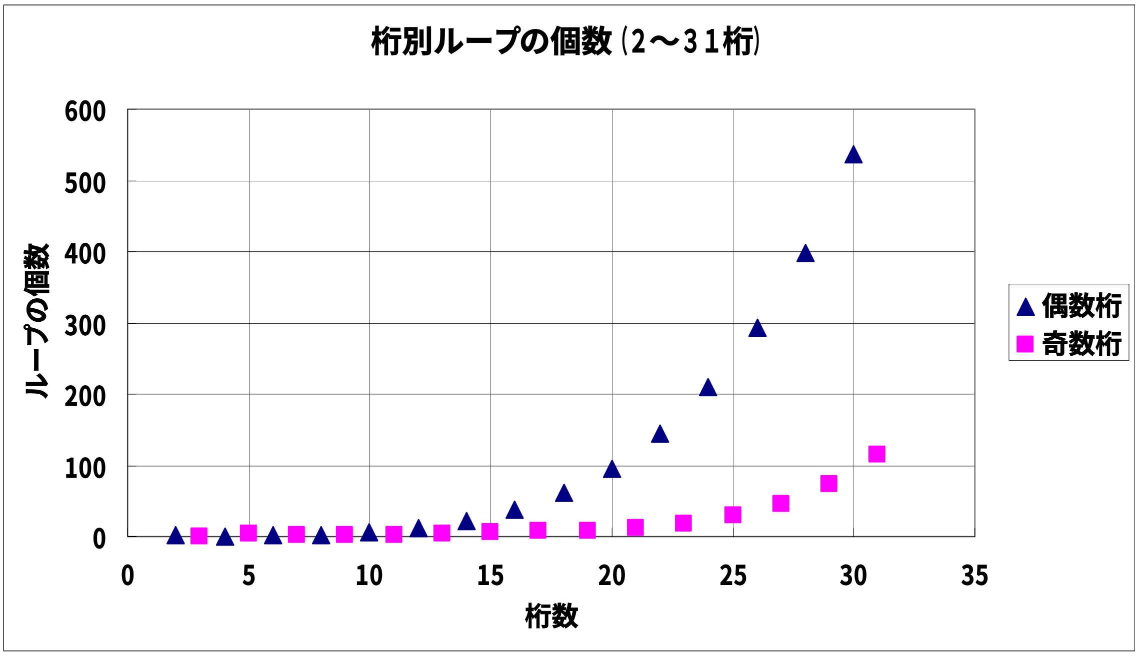
桁別ループの個数（2～31桁）
600
500
400
300
200
100
0
ループの個数
0
5
10
15
20
25
30
35
桁数
偶数桁
奇数桁

図3－13

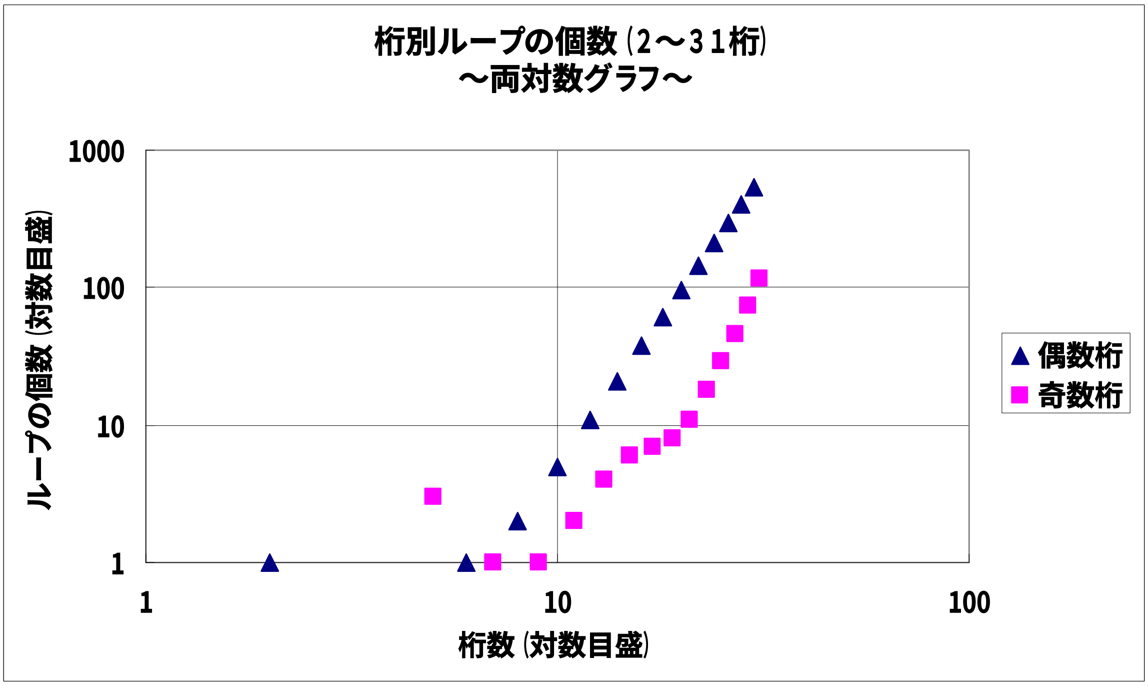
桁別ループの個数（2～31桁）
～両対数グラフ～
1000
100
10
1
ループの個数（対数目盛）
1
10
100
桁数（対数目盛）
偶数桁
奇数桁

図3－14

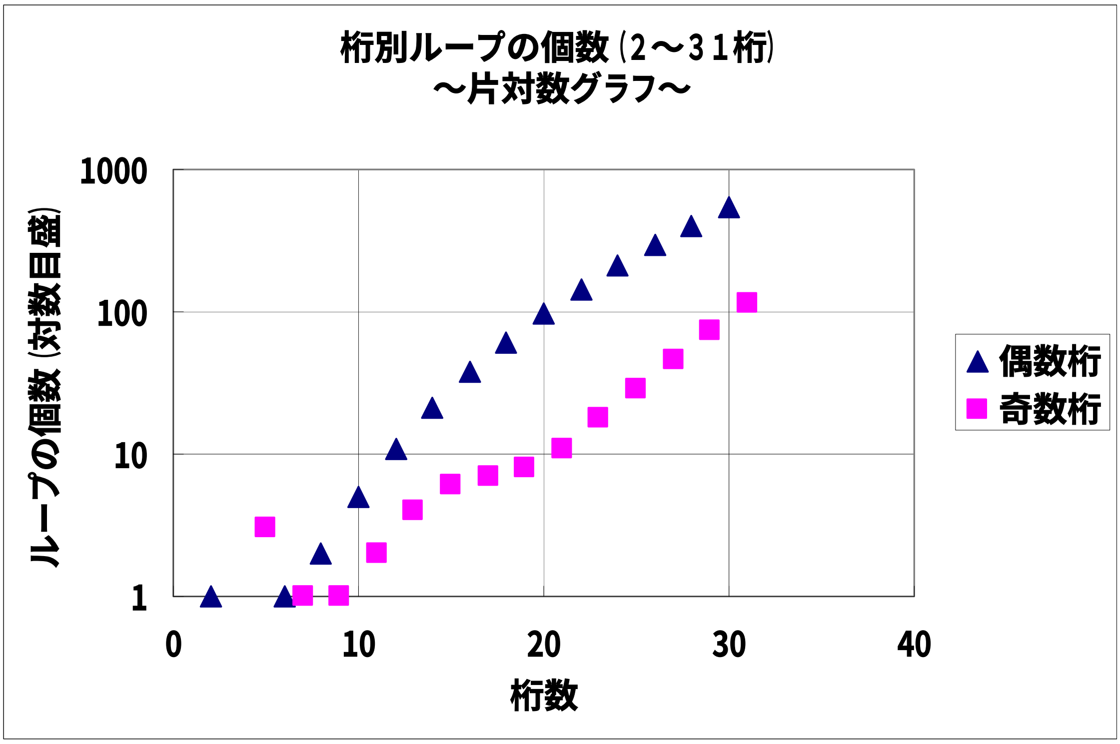

図３－１５

偶数桁については、図３－１４の両対数グラフは８桁から３０桁のデータ点についてきれいに直線上に並んでいる。図３－１６に８桁から３０桁のデータ点を取りだして、両対数グラフに表す。

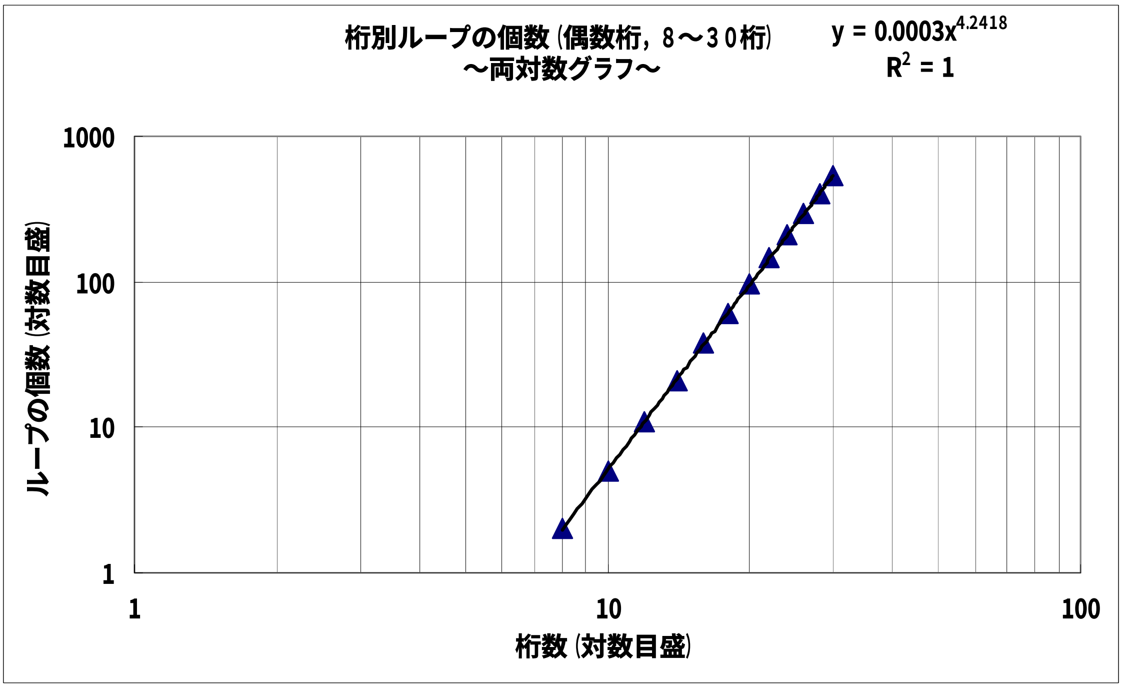

図３－１６

図３－１６から、回帰曲線は桁数ｘとループの個数ｙとすると、$y = 0.0003x^{4.2418}$ で、R2 乗値は 1.0000 である。あきらかに、偶数桁の桁数とループの個数はべき関数で表される。

ループの個数が桁数のべき乗で記述されるしくみを調べるために、３－１，３－２と同様に、桁数字を並び替えによる重複を省いた初期値のなかから、カプレカ変換後にループになる初期値を取りだして、桁数との関係を両対数グラフに表す（図３－１７参照）。

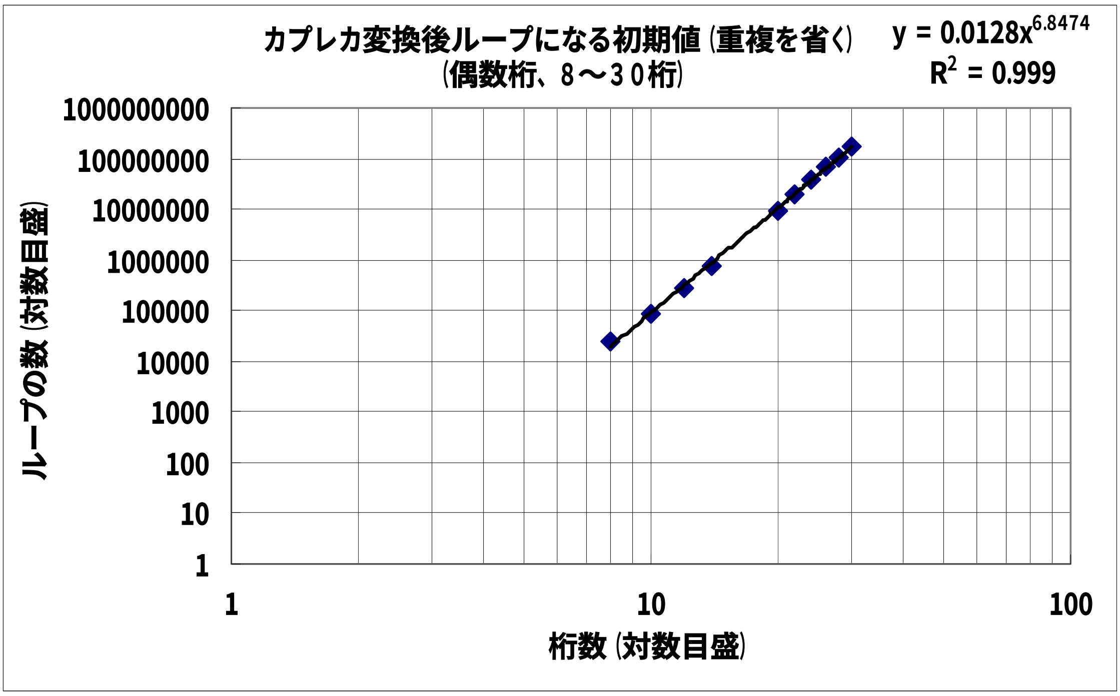

図３－１７

図３－１７のように、m桁の初期値の個数は、桁数mのべき乗で増加している。８から３０桁のデータ点について回帰曲線を求めると、$y = 0.0128x^{6.8474}$，R^2 値 ＝ 0.999 と、データ点は非常によくべき関数に乗っている。３－１の到達点の場合と同様に、桁数とループの個数の関係がべき関数で記述されるのは、カプレカ変換の持つ桁数字の並べ替えに対する対称性から、取りうる初期値の個数が桁数のべき乗で増えているためと考えられる。第２章でみたように、固定点にくらべてループの数が非常に多い。到達点について得られた結果とループについての結果が一致することは自然である。

一方、１章の表１にみるように、固定点と同様、ループの中に現れる整数にも、桁を超えて似た数字の並びが現れている。固定点と同様にループも、いくつかの系列に分類され、桁数が増えるに従って新しい系列のループが出現することも考えられる。ループは固定点に比べて非常に数が多く、本論文ではループに現れる整数の形についての考察は行ってい

ない。今後、ループに現れる数字の並びについても調べたい。

奇数桁については、３１桁までの範囲では２変数間の関係がはっきりしない。図３－１４、図３－１５ともに、２１～３１桁のデータ点が比較的直線に乗っているので、この範囲で関数形を決める。べき関数にフィッティングを行うと、$y = 0.000001x^{6.0294}$（R２乗値= 0.9982)、指数関数にフィッティングを行うと、$y = 0.0807\exp(0.2348x)$（R2 乗値= 0.9998）である。いずれもＲ２値は１に近いが、フィッティングに用いたデータ点が少なく、さらに高次桁の計算が必要である。

４　まとめ

２～３１桁の整数についてカプレカ変換を実行し、すべての固定点とループを求めた。得られた固定点２５７個は、偶数桁７系列、奇数桁６系列、３の倍数桁１系列の計１４系列に分類される。各系列とも種になる固定点をただ１つ持ち、種になる固定点に決まった方法で桁数字を加えていくと他の固定点が生成される。

１４系列を大別すると、

①２桁ごとに同系列の固定点が１個ずつ現れる系列。
偶数桁では（ａ),（ｂ)、奇数では（ｉ),（ｊ)。

②２桁ごとに同系列の固定点が数を増やしながら出現。さらに６桁ごとに子の系列を生み出す系列。
偶数桁では親系列（ｃ）→（ｄ）→（ｅ）→（ｆ)。
奇数桁では親系列（ｋ）→（ｎ）→（ｏ)。（ｇ）→（３２桁以上に出現が予想される)。

③３桁ごとに同系列の固定点が１個ずつ現れる系列。
（ｈ）

④未定。
他の固定点と独立して、２３桁だけに１個だけ出現。
奇数桁の（ｐ)。

今後、どのようなしくみで上記の系列が出現するか調べるために、固定点に到達する計算の道筋を追うことが必要である。また、３２桁以上のカプレカ変換を実行し、系列の出現パターンを調べたい。たとえば（ｐ）の系列は、３１桁まではただ１つの固定点が系列を作らず独立に存在している。３２桁以上では（ｐ）に属する新たな固定点が出現するかどうか興味深い。また、ループの系列を調べることも今後の課題として残されている。

桁数と到達点の個数、桁数と固定点の個数、桁数とループの個数の関係を、データ点の

回帰曲線として求めると、偶数桁についてはいずれもべき関数によくフィットする。この理由として、第１に、カプレカ変数の桁数字の並び替えに対して対称性のため、並び替えの自由度を削った初期値の個数は、１０[桁数]ではなく、桁数のべき乗である。個数と到達点の個数、個数とループの個数の関係がべき関数であるのは、このためと考えられる。第２に、固定点の系列②は、種となる固定点から系列に属する新しい固定点をどんどん生み出すばかりでなく、この系列を親として新しい系列を生み出す。②の系列の固定点の占める割合が大きくなると、固定点は桁数とともにべき関数的に増える。桁数と固定点の数の関数がべき関数であるのはこのためと考えられる。

後者の場合、②に属する新しい親系列（たとえば（ｇ））の固定点が増えていくと、べきがずれて、桁数と固定点の個数の両対数グラフは、３１桁までの回帰直線からずれていくと予想される。また、奇数桁については桁数が不足し、２変数間の関係が定まっていない。アルゴリズムを改良して、さらに高次桁のカプレカ変換を実行したい。

注

注１　カプレカ定数をカプレカ数とよぶことがある。本稿では、カプレカ数は次の性質を満たす整数として、カプレカ定数と区別する

カプレカ数

ｎ桁の整数ｘの２乗をｙとする。ｙの右からｎ桁を取り出し、左に残った桁と２つに分ける。右からｎ桁の数をＡ, 残りの桁から作った数をＢとすると、Ｘ＝Ａ＋Ｂ（例：ｘ＝297, ｙ＝88209。ｙの右から３桁は 209, 残りの桁は 88。ｘ＝297, Ａ＋Ｂ＝209＋88＝297。よってｘ＝Ａ＋Ｂ)。これを満たす整数として、1, 9, 45, 55, 99, 297, 703・・があり、カプレカ数とよぶ。

文献

１　D. R. Kaprekar, An Interesting Property of the Number 6174, Scripta Math., 21(1955) 304.

２　D. R. Kaprekar, Another Solitaire Game, Scripta Math. 15(1949) 244

３　D. D. McCkracken, A Guide to Fortran IV Programming, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1972,252

4　Klaus E. Eldridge and Seok Sagong, The Determination of Kaprekar Convergence and Loop Convergence of all Three-Digit Numbers, American Mathematical Monthly, 95(1988), 105

5　R.W. Ellis and J.R. Lewis, Investigations into the Kaprekar Process, 2002.

6　Walter Schneider, Kaprekar Process, http://www.wechnei.de/digit-related-numbers/kaprekar-process

Abstract

The Kaprekar Transformation for Higher-digit Numbers 1

Yumi Hirata

All fixed points and loops under the Kaprekar transformation up to 31 digits were found. All the 257 fixed points can be classified into 14 series. Each series have a special fixed point called the "seed" number, which generates its series by adding particular digit numbers to itself. The number of fixed points and that of loops increase by power of the number of digits .