

高次桁のカプレカ変換 2

一数のループに現れる規則性一

平田 郁美

キーワード

カプレカ変換 カプレカ数 数のループ

要旨

32桁を除く33桁までの整数についてカプレカ変換を実行し、到達点として得られる2558個の数のループの持つ規則性を調べた。すべてのループは、周期1（固定点、カプレカ数）、2, 3, 4, 5, 7, 8または14に分類され、他の周期のループは現れない。すべてのループは周期ごとにいくつかの系列に分類され、系列ごとにただ一つの種となるループを持つ。種となるループの各要素に、いくつかの決まった桁数字を加えることによって、高次桁のループが生成され、系列を形成している。系列によっては、他の系列との間に親子関係がある。親系列の種となるループの各要素に特定の桁数字を加えることによって、子系列の種となるループが生成され、系列群を形成している。周期1のループは5つの系列群に、周期2のループは3つの系列群に分類される。

1 はじめに

次のような変換を考える。

- 1) 4桁の任意の整数を考える。ただし、すべての桁数字が同じ「ぞろ目」は除く。
- 2) 1) の整数の桁数字を大きい順に並び替えて、その桁数字を用いてできる最大の整数を作る。
- 3) 1) の整数の桁数字を小さい順に並び替えて、その桁数字を用いてできる最小の整数を作る。
- 4) 2) から3) を引く。差が3桁以下になった場合は、上位の桁を0で埋める。得られた整数を1) の整数に置き換えて2) に戻る。

例として、2122からスタートする。

- 2) 桁数字を大きい順に並べる 2 2 2 1
- 3) 桁数字を小さい順に並べる 1 2 2 2
- 4) 2) から3) を引く 9 9 9

上位の桁に0を加えて0999にして、2) に戻る。

- 2) 桁数字を大きい順に並べる 9 9 9 0
 3) 桁数字を小さい順に並べる 0 9 9 9
 4) 2) から 3) を引く 8 9 9 1

以下、同様の手順を繰り返す。

$$\begin{array}{r}
 9981 \\
 \underline{-1899} \\
 8082
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{r}
 8820 \\
 \underline{-0288} \\
 8532
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 8532 \\
 \underline{-2358} \\
 6174
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 7641 \\
 \underline{-1461} \\
 6174
 \end{array}
 \dots$$

手順を何度か繰り返すと、引き算の答えには **6174** だけが現れるようになる。「そろ目」以外のどんな 4 桁の整数からはじめても、得られる到達点は **6174** のみである。これはインドの数学者カプレカが 1947 年に発見した整数の持つ不思議な性質であり、この変換をカプレカ変換もしくはカプレカルーチンとよぶ^{2,3}。

そろ目を除く 15 桁までのすべての整数についてカプレカ変換を実施した結果を表 1-1 に示す。たとえば 2 桁の整数の場合は、 $63 \rightarrow 27 \rightarrow 45 \rightarrow 09 \rightarrow 81 \rightarrow 63 \dots$ のように、5 つの整数が同じ順番で繰り返しあらわれる数のループが得られる。これを周期 5 の数のループとよぶ。4 桁の場合の **6174** は周期 1 の数のループであるが、これを固定点、あるいはカプレカ数とよぶ。スタートの数(以下初期値とよぶ)の自由度に比べて、到達点としてあらわれる数のループの種類は圧倒的に少ないことがわかる。

前稿¹では、そろ目を除く 31 桁までのすべての数を初期値としてカプレカ変換を実行し、到達点として得られた固定点 **256** 個について考察した。**256** 個の固定点は 14 個の系列に分類される。各系列に含まれる固定点のうち最低次桁の固定点を種として、一定のルールで桁数字を加えることにより高次桁の固定点が生成され、系列を形成している¹。

本稿では、固定点の 14 系列の種を観察し、種を構成する桁数字に現れる特徴と、種から高次桁を生成するルールに着目し、14 系列を 5 つに大別する。さらに同じ手法を使って、周期 2 以上のループを周期ごとに分類し、数のループに現れる規則性を考察する。

表 1 - 1 : 15 桁までのカプレカ変換に現れる固定点とループ

	ループの 数	周期	ループ構成
2桁	1	5	9→81→63→27→45
3桁	1	1	495
4桁	1	1	6174
5桁	3	2	53955→59994
		4	74943→62964→71973→83952
		4	63954→61974→82962→75933
6桁	3	1	631764
		1	549945
		7	851742→750843→840852→860832→862632→642654→420876
7桁	1	8	8429652→7619733→8439552→7509843→9529641→8719722→8649432→7519743
8桁	4	1	97508421
		1	63317664
		3	86526432→64308654→83208762
		7	86308632→86326632→64326654→43208766→85317642→75308643→84308652
9桁	3	1	864197532
		1	554999445
		14	865296432→763197633→844296552→762098733→964395531→863098632→965296431→ →873197622→865395432→753098643→954197541→883098612→976494321→874197522
10桁	8	1	9753086421
		1	6333176664
		1	9975084201
		3	8655264432→6431088654→8732087622
		3	8653266432→6433086654→8332087662
		3	8765264322→6543086544→8321088762
		3	9775084221→9755084421→9751088421
		7	8633086632→8633266632→6433266654→4332087666→8533176642→7533086643→ →8433086652
11桁	3	1	86431976532
		5	88431976512→87641975322→86541975432→86420987532→96641975331
		8	87331976622→86542965432→76320987633→96442965531→87320987622→96653954331→ →86330986632→96532966431
12桁	16	1	975330866421
		1	633331766664
		1	555499994445
		1	997530864201
		1	999750842001
		3	865332666432→643330866654→833320876662
		3	865532664432→643310886654→873320876622
		3	865552644432→643110888654→877320876222
		3	876532664322→654330866544→833210887662
		3	876552644322→654310886544→873210887622
		3	977510884221→977550844221→975510884421
		3	977530864221→975530864421→975310886421
		3	877652643222→655430865444→832110888762
		3	977750842221→975550844421→975110888421
		3	997750842201→997550844201→997510884201
		7	863330866632→863332666632→643332666654→433320876666→853331766642→ →753330866643→843330866652

	ループ の数	周期	ループ構成
13桁	5	1	8643319766532
		2	8733209876622→9665429654331
		5	8764209875322→9665419754331→8843209876512→9766419753321→8854319765412
		5	8643209876532→9664319765331→8843319766512→8764319765322→8654319765432
		5	8654209875432→9664209875331→9864319765311→8874319765212→8765419754322
14桁	27	1	97755108844221
		1	97533308666421
		1	63333317666664
		1	99753308664201
		1	99975308642001
		1	99997508420001
		3	86533326666432→64333308666654→83333208766662
		3	86555526444432→64311108888654→87773208762222
		3	86553326664432→64333108866654→87333208766622
		3	87776526432222→65554308654444→83211108888762
		3	97775308642221→97555308644421→97531108886421
		3	87765326643222→65543308665444→83321108887662
		3	97753308664221→97553308664421→97533108866421
		3	97753108864221→97755308644221→97553108864421
		3	87653326664322→65433308666544→83332108876662
		3	86555326644432→64331108886654→87733208766222
		3	87655326644322→65433108866544→87332108876622
		3	97755508444221→97551108884421→97775108842221
		3	97777508422221→97555508444421→97511108888421
		3	87655526444322→65431108886544→87732108876222
		3	65543108865444→87321108887622→87765526443222
		3	97775508442221→97555108844421→97751108884221
		3	99775308642201→99755308644201→99753108864201
		3	99775108842201→99775508442201→99755108844201
		3	99777508422201→99755508444201→99751108884201
		3	99977508422001→99975508442001→99975108842001
		7	86333308666632→86333326666632→64333326666654→43333208766666→85333317666642→ →75333308666643→843333086666652
15桁	8	1	864333197666532
		1	555549999944445
		2	873332098766622→966543296654331
		5	976654197543321→885432098765412→976642098753321→986543197654311→887432098765212
		5	865433197665432→864332098766532→966433197665331→884333197666512→876433197665322
		5	966432098765331→986433197665311→887433197665212→876543197654322→865432098765432
		5	987643197653211→887543197654212→876542098754322→966542098754331→986432098765311
		5	966543197654331→884332098766512→976643197653321→885433197665412→876432098765322

2 固定点にあられる規則性¹

31 桁までのすべての数（そろ目を除く）を初期値としてカプレカ変換を実行し、到達点として得られた固定点 256 個のうち、偶数桁のものを表 2-1 に、奇数桁のものを表 2-2 に示す。

表 2-1 偶数桁のカプレカ変換に現れる固定点

number of digits	number of fixed points and loops	fixed points and number of loops	series name	number of digits	number of fixed points and loops	fixed points and number of loops	series name
2桁	1	number of loops = 1		20桁	110	88664432199776553312	(b)
4桁	1	6174	(a)			97755333108866644221	(d)
6桁	3	631764	(a)			633333331766666664	(a)
		549945	(h)			975333330866666421	(c)
8桁	4	number of loops = 1				97775551108884442221	(e)
		97508421	(c)			99775533108866442201	(d)
		63317664	(a)			9975333308666664201	(c)
10桁	8	number of loops = 2				99977553108864422001	(d)
		9753086421	(c)			9997533308666642001	(c)
		6333176664	(a)			99997755108844220001	(d)
		9975084201	(c)			9999753308666420001	(c)
12桁	16	number of loops = 5				99999753308664200001	(c)
		97530866421	(c)			9999975308642000001	(c)
		633331766664	(a)			9999997508420000001	(c)
		555499994445	(h)			number of loops = 96	
		997530864201	(c)	22桁	162	977553331088666644221	(d)
14桁	27	999750842001	(c)			9777555311088864442221	(e)
		number of loops = 11				8866443321997766553312	(b)
		97755108844221	(d)			97533333308666666421	(c)
		97533308666421	(c)			63333333317666666664	(a)
		63333317666664	(a)			9977553331088666442201	(d)
16桁	46	99753308664201	(c)			997533333086666664201	(c)
		99975308642001	(c)			9977755511088844422201	(e)
		99997508420001	(c)			997755331088664422001	(d)
		number of loops = 21				997533333086666642001	(c)
		9775531088644221	(d)			9999775531088644220001	(d)
18桁	73	6333333176666664	(a)			999975333086666420001	(c)
		975333086666421	(c)			9999977551088442200001	(d)
		9977551088442201	(d)			999997533086664200001	(c)
		997533086664201	(c)			9999997533086642000001	(c)
		999753086420001	(c)			99999997508420000001	(c)
20桁	110	9999975084200001	(c)			number of loops = 145	
		number of loops = 38		24桁	231	977755533110888664442221	(e)
		886644219977553312	(b)			97755333310886666644221	(d)
		977553310886644221	(d)			6333333333176666666664	(a)
		97533330866666421	(c)			5555554999999994444445	(h)
		633333331766666664	(a)			886644333219977666553312	(b)
22桁	162	5555499999444445	(h)			975333333086666666421	(c)
		997755310886442201	(d)			997775553110888644422201	(e)
		99753330866664201	(c)			99775533310886666442201	(d)
		999775510884422001	(d)			997533333086666664201	(c)
		99975330866642001	(c)			999775533310886664422001	(d)
24桁	231	9999753086420001	(c)			9997533330866666642001	(c)
		9999975084200001	(c)			9997533330866666642001	(c)
		number of loops = 61				99977555110888444222001	(e)
		886644219977553312	(b)			99977553310886644220001	(d)
		977553310886644221	(d)			999975333086666420001	(c)
26桁	231	97533330866666421	(c)			999997755310886442200001	(d)
		633333331766666664	(a)			99999753330866664200001	(c)
		5555554999999994444445	(h)			999999775510884422000001	(d)
		997755310886442201	(d)			99999975330866642000001	(c)
		99753330866664201	(c)			999999975330866420000001	(c)
28桁	231	999775510884422001	(d)			999999975084200000001	(c)
		99975330866642001	(c)			number of loops = 210	
		9999753086420001	(c)				
		9999975084200001	(c)				
		number of loops = 61					

number of digits	number of fixed points and loops	fixed points and number of loops	series name
26桁	318	9775533333108866666644221	(d)
		97775553331108886664442221	(e)
		9777755551110888444422221	(f)
		9753333333308666666666421	(c)
		6333333333317666666666664	(a)
		98876654422099877554332111	(g)
		88664433332199776666553312	(b)
		99777555331108886644422201	(e)
		9977553333310886666442201	(d)
		9975333333308666666664201	(c)
		99977755531108886444222001	(e)
		99977553333108866664422001	(d)
		99975333333086666666642001	(c)
		99997755333108866644220001	(d)
		9999753333308666666420001	(c)
		99997775551108884442220001	(e)
		99999775533108866442200001	(d)
		99999753333086666664200001	(c)
		99999977553108864422000001	(d)
		9999997533308666642000001	(c)
		99999997755108844220000001	(d)
		9999999753308666420000001	(c)
		9999999975308642000000001	(c)
		number of loops = 293	
28桁	429	9887665443220998776554332111	(g)
		977755533311088866664442221	(e)
		9777755553111088886644422221	(f)
		977553333331088666666644221	(d)
		88664433332199776666553312	(b)
		63333333333176666666666664	(a)
		97533333333086666666666421	(c)
		997777555511108888444422201	(f)
		9977755533311088866644422201	(e)
		99775533333108866666442201	(d)
		99753333333086666666664201	(c)
		9988766544220998775543321101	(g)
		9997775553311088866444222001	(e)
		99977553333108866664422001	(d)
		99975333333086666666642001	(c)
		999977553331088666666420001	(d)
		9999753333308666666420001	(c)
		99997775551108884442220001	(e)
		99999775533108866664200001	(d)
		99999753333086666664200001	(c)
		99999977553108864422000001	(d)
		9999997533308666642000001	(c)
		99999997755108844220000001	(d)
		9999999753308666420000001	(c)
		9999999975308642000000001	(c)
		9999999997508420000000001	(c)
		number of loops = 399	

number of digits	number of fixed points and loops	fixed points and number of loops	series name
30桁	572	988766544332209987766554332111	(g)
		977775555331110888866444422221	(f)
		977553333333310886666666644221	(d)
		977755533333110888666664442221	(e)
		9753333333333086666666666421	(c)
		63333333333331766666666666664	(a)
		5555555549999999999444444445	(h)
		8866443333321997766666553312	(b)
		997775553333110888666644422201	(e)
		998876654432209987765543321101	(g)
		997777555531110888864444222201	(f)
		997755333333310886666666442201	(d)
		99753333333330866666666664201	(c)
		999777755551110888844442222001	(f)
		99977553333310888666444222001	(e)
		9997755333331088666664422001	(d)
		99975333333330866666666642001	(c)
		999887665442209987755433211001	(g)
		999977755533110888664442220001	(e)
		999977553333310886666644220001	(d)
		99997533333330866666666420001	(c)
		999997775553110888644422200001	(e)
		999997755333310886666442200001	(d)
		9999975333333086666664200001	(c)
		99999977553331088666442200001	(d)
		9999997533333086666664200001	(c)
		9999999775510888444222000001	(e)
		9999999753333086666642000001	(d)
		9999999977551088442200000001	(d)
		999999997533086664200000001	(c)
		999999999753086420000000001	(c)
		999999999975084200000000001	(c)
		number of loops = 536	

表 2-2 奇数桁のカプレカ変換に現れる固定点

number of digits	number of fixed points and loops	fixed points and number of loops	series name	number of digits	number of fixed points and loops	fixed points and number of loops	series name
3桁	1	495	(h)	27桁	58	888666444221999777555333112	(j)
5桁	3	number of loops = 3				98765433333209876666543211	(k)
7桁	1	number of loops = 1				987765543321098876654432211	(n)
9桁	3	864197532	(i)			8643333333319766666666532	(i)
		554999445	(h)			555555549999999944444445	(h)
		number of loops = 1				998776554321098876544322101	(n)
11桁	3	86431976532	(i)			998765433332098766665432101	(k)
		number of loops = 2				999876543332098766654321001	(k)
13桁	5	8643319766532	(i)			999877655421098875443221001	(n)
		number of loops = 4				999987654332098766543210001	(k)
15桁	8	864333197666532	(i)			99998765432098765432100001	(k)
		555549999944445	(h)			99999876542098754321000001	(k)
		number of loops = 6				number of loops = 46	
17桁	9	98765420987543211	(k)	29桁	88	98776554333210988766654432211	(n)
		86433331976666532	(i)			88866644432219997776555333112	(j)
		number of loops = 7				9876543333320987666666543211	(k)
19桁	11	9876543209876543211	(k)			98777655542110988875444322211	(o)
		8643333319766666532	(i)			864333333333197666666666532	(i)
		9987654209875432101	(k)			99877655433210988766544322101	(n)
		number of loops = 8				9987654333320987666665432101	(k)
21桁	16	987654332098766543211	(k)			99987765543210988765443221001	(n)
		864333333197666666532	(i)			9998765433320987666654321001	(k)
		555554999999444445	(h)			9999876543320987666543210001	(k)
		998765432098765432101	(k)			99998776554210988754432210001	(n)
		999876542098754321001	(k)			9999987654320987665432100001	(k)
23桁	25	number of loops = 11				9999987654320987654321000001	(k)
		98765433320987666543211	(k)	31桁	132	9999998765420987543210000001	(k)
		98776554210988754432211	(n)			number of loops = 74	
		864333333197666666532	(i)			987765543332109887666654432211	(n)
		87765443219997765543222	(p)			98765433333320987666666543211	(k)
		99876543320987665432101	(k)			9877765554321109888765444322211	(o)
		99987654320987654321001	(k)			864333333333197666666666532	(i)
25桁	37	99998765420987543210001	(k)			8886664443322199977766555333112	(j)
		number of loops = 18				9987765543332109887666544322101	(n)
		987654333209876666543211	(k)			9987654333320987666665432101	(k)
		9877655432109887654432211	(n)			9987776555421109888754443222101	(o)
		86433333331976666666532	(i)			9998776554332109887665443221001	(n)
		998765433209876665432101	(k)			999876543333209876666654321001	(k)
		9987765542109887544322101	(n)			9999877655432109887654432210001	(n)
		9998765433209876654321001	(k)			999987654333209876666543210001	(k)
		9999876543209876543210001	(k)			999998765433209876665432100001	(k)
		9999987654209875432100001	(k)			999998765433209876665432100001	(n)
		number of loops = 29				99999876543209876654321000001	(k)
						999999876543209876543210000001	(k)
						999999987654209875432100000001	(k)
						number of loops = 115	

表 2-1、表 2-2 をみると、固定点に現れる整数の桁数字には似た数字の列が現れていることがわかる。Ellis らは、15 桁までのカプレカ変換を実行し、6174 に $\frac{m-4}{2}$ 個の 3 と 6 を加えた固定点の系列があることを示した⁴。ここで m は固定点の桁数を表す。

例： 4 桁 6174
 6 桁 6**3**17**6**4
 8 桁 6**33**17**66**4

同様に 495 を種にして、495 に $\frac{(m-3)}{3}$ 個の 5 と 9 と 4 を加えた固定点の系列を示した⁴。

例： 3 桁 495
 6 桁 549945
 12 桁 555499994445
 18 桁 555554999999444445

表 2-1、表 2-2 に現れる 256 個の固定点を観察すると、Ellis らが見つけた 2 系列に加えて 12 系列が存在することがわかる。計 14 系列 a ~ p によって、256 個の固定点すべてが表現される。ここで a から p は便宜的につけた系列の名前である。

2-1. 14 系列

14 系列をそれぞれ以下で説明する。

(a) Ellis らが報告した、6174 を種にして 6174 に $\frac{m-4}{2}$ 個の 3 と 6 を加えた固定点の系列⁴。4 桁以上の偶数桁に 1 個ずつ現れる。

例： 4 桁 6174
 6 桁 6**3**17**6**4
 8 桁 6**33**17**66**4

(b) 886644219977553312 を種にして、886644219977553312 に $\frac{m-18}{2}$ 個の 3 と 6 を加えた固定点の系列。18 桁以上の偶数桁に 1 個ずつ現れる。

例： 18 桁 886644219977553312
 20 桁 886644**3**219977**6**553312
 22 桁 886644**33**219977**66**553312

(c) 97508421 を種にして、97508421 に α 個の 3 と 6 と、 β 個の 9 と 0 を加えた固定点

の系列。ここで、 $\alpha + \beta = \frac{m-8}{2}$ 。8 桁以上の偶数桁に $(\frac{m-8}{2}+1)$ 個ずつ現れる。

例： 8 桁 97508421
 10 桁 975**3**08**6**421, **9**9750842**0**1
 12 桁 975**33**08**66**421, **99**75**3**08**6**42**0**1, **999**750842**00**1

(d) 97755108844221 を種にして、97755108844221 に α 個の 3 と 6 と、 β 個の 9 と 0 を加えた固定点の系列。ここで、 $\alpha + \beta = \frac{m-14}{2}$ 。14 桁以上の全桁に $(\frac{m-14}{2}+1)$ 個ずつ現れる。

例： 14 桁 97755108844221
 16 桁 97755**3**1088**6**44221, **99**775510884422**0**1
 18 桁 97755**33**1088**66**44221, **99**7755**3**1088**6**4422**0**1, **999**775510884422**00**1

なお、系列 d の種 **97755108844221** は、系列 c の種 97508421 に 7,5,1,8,4,2 を 1 個ずつ加えた形になっている。次節ではこの特徴に着目し、14 系列が 5 つに大別されることを示す。

(e) 97775551108884442221 を種にして、97775551108884442221 に α 個の 3 と 6 と、 β 個の 9 と 0 を加えた固定点の系列。ここで、 $\alpha + \beta = \frac{m-20}{2}$ 。20 桁以上の偶数桁に $(\frac{m-20}{2}+1)$ 個ずつ現れる。

例： 20 桁 97775551108884442221
 22 桁 9777555**3**110888**6**4442221, **99**777555110888444222**0**1

ここで、系列 e の種 **97775551108884442221** も、系列 c と系列 d の関係と同様に、系列 c の種 97508421 に 7,5,1,8,4,2 を 2 個ずつ加えた形になっている。

(f) 97777555511108888444422221 を種にして、97777555511108888444422221 に α 個の 3 と 6 と、 β 個の 9 と 0 を加えた固定点の系列。ここで、 $\alpha + \beta = \frac{m-26}{2}$ 。

26 桁以上の偶数桁に $(\frac{m-26}{2}+1)$ 個ずつ現れる。

例： 26 桁 97777555511108888444422221

28 桁 977775555**3**11108888**6**444422221, **9**777755551110888844442222**0**1

系列 f の種 9**77775555****511108888****44442222**21 もまた、系列 c と系列 d, e との関係と同様に、系列 c の種 97508421 に 7,5,1,8,4,2 を 3 個ずつ加えた形になっている。

(g) 98876654422099877554332111 を種にして、98876654422099877554332111 に α 個の 3 と 6 と、 β 個の 9 と 0 を加えた固定点の系列。ここで、 $\alpha + \beta = \frac{m-26}{2}$ 。26 桁以

上の偶数桁に $(\frac{m-26}{2} + 1)$ 個ずつ現れる。

例： 26 桁 98876654422099877554332111
 28 桁 988766544**3**22099877**6**554332111, **9**9887665442209987755433211**0**1

(h) 495 を種にして、495 に $\frac{(m-3)}{3}$ 個の 5 と 9 と 4 を加えた固定点の系列。6 桁以上の 3 の倍数 $m = 3k$ 桁 ($k = 2, 3, \dots$) に 1 個ずつ現れる。Ellis らによって示された⁴。

例： 3 桁 495
 6 桁 549945
 9 桁 554999445
 12 桁 555499994445

(i) 864197532 を種にして、864197532 に $\frac{m-9}{2}$ 個の 3 と 6 を加えた固定点の系列。9 桁以上の奇数桁に 1 個ずつ現れる。

例： 9 桁 864197532
 11 桁 864**3**197**6**532

 29 桁 864**3333333333**197**6666666666**532

(j) 888666444221999777555333112 を種にして、888666444221999777555333112 に $\frac{m-27}{2}$ 個の 3 と 6 を加えた固定点の系列。27 桁以上の奇数桁に 1 個ずつ現れる。

例： 27 桁 888666444221999777555333112
 29 桁 888666444**3**221999777**6**555333112
 31 桁 888666444**33**221999777**66**555333112

(k) 98765420987543211 を種にして、98765420987543211 に α 個の 3 と 6 と、 β 個の 9 と 0 を加えた固定点の系列。ここで、 $\alpha + \beta = \frac{m-17}{2}$ 。17 桁以上の奇数桁に $(\frac{m-17}{2} + 1)$ 個ずつ現れる。

例： 17 桁 98765420987543211
 19 桁 987654**3**20987**6**543211, 9**9**876542098754321**0**1
 21 桁 987654**33**20987**66**543211, 9**9**87654**3**20987**6**54321**0**1,
 9**99**876542098754321**00**1

ここで前述の系列 g の種 98**8**76**6**54**4**2209**9**87**7**5**5**43**3**211**1** が、この系列 k の種 98765420987543211 に 8,6,5,4,2,7,5,3,2,1 を加えたものになっている。加える桁数字は異なるが、系列 c と系列 d との関係と同様の関係がみられる。次節で詳細に考察する。

(n) 98776554210988754432211 を種にして、98776554210988754432211 に α 個の 3 と 6 と、 β 個の 9 と 0 を加えた固定点の系列。ここで、 $\alpha + \beta = \frac{m-23}{2}$ 。23 桁以上の奇数桁に $(\frac{m-23}{2} + 1)$ 個ずつ現れる。

例： 23 桁 98776554210988754432211
 25 桁 98776554**3**2109887**6**54432211, 9**9**877655421098875443221**0**1
 27 桁 98776554**33**2109887**66**54432211, 9**9**8776554**3**2109887**6**5443221**0**1,
 9**99**877655421098875443221**00**1

なお、系列 n の種 987**7**65**5**421098**8**7544**3**2211 もまた、系列 k の種 98765420987543211 に、7,5,1,8,4,2 を 1 個ずつ加えた形になっている。

(o) 98777655542110988875444322211 を種にして、98777655542110988875444322211 に α 個の 3 と 6 と、 β 個の 9 と 0 を加えた固定点の系列。ここで、 $\alpha + \beta = \frac{m-29}{2}$ 。29 桁以上の奇数桁に $(\frac{m-29}{2} + 1)$ 個ずつ現れる。

例：
 29 桁 98777655542110988875444322211
 31 桁 9877765554**3**211098887**6**5444322211, 9**9**877765554211098887544432221**0**1

系列 o の種 987**77**65**55**4211098**88**7544**4**322211 もまた、系列 k の種

98765420987543211 に 7,5,1,8,4,2 を 2 個ずつ加えた形になっている。

(p) 23 桁に現れる 87765443219997765543222。

31 桁までの範囲では、系列 p に含まれるのは 23 桁のみに現れる上記の固定点だけである。もし系列 p に高次桁が存在するとすれば、31 桁までのすべての固定点を求めてあるので、高次桁は 23 桁の固定点に 9 桁以上の桁数字を加えることによって生成されることが考えられる。

系列 p の固定点 87765443219997765543222 と系列 i の種 864197532 を比較すると、後者に 7,7,5,4,3,2,9,9,7,6,5,4,2,2 を加えることによって前者が生成されている。このルールにより 37 桁の値 8777765544433221999997776655544322222 を作り、これを初期値にとってカプレカ変換を実行してみると、固定点になっていることがわかる。さらに、7,7,5,4,3,2,9,9,7,6,5,4,2,2 を 2 回加えた 51 桁の整数も固定点になっていることが確認できる。ここから、系列 p として次の系列を考えることができる。

23 桁 87765443219997765543222
 37 桁 8777765544433221999997776655544322222
 51 桁 877777765554444333222199999997777666555544432222222

あるいは、系列 p は 23 桁の固定点のみを含む系列、もしくは系列内の高次桁を生成するルールは未確認のままであり、系列 i の種から系列 p の種、続いて 37 桁、51 桁の新系列の種が生成されるとする考え方もある。これについては次節で考察する。

2-2. 14 系列をまず 7 グループに分ける

2-1 節では、低次桁の固定点に一定の桁数字を加えることによって高次桁の固定点が生成されることに着目し、この関係で結ばれる固定点を集めて 14 の系列に分類した。また、14 系列の種の中には、種同士にも同様の関係がある場合があることを示した。たとえば、系列 d、系列 e、系列 f の種は、系列 c の種 97508421 に、7,5,1,8,4,2,1 を $\frac{m-8}{6}$ 個加えることによって作られている。系列の種の間こうした関係があるとき、系列間に親子関係があるとよび、低次桁の種を持つ系列を親系列、親系列の種に一定の桁数字を加えたものを種とする系列を子系列とよぶことにする。

表 2-3 は、系列間に存在する親子関係に着目し、14 系列を 7 グループに分類したものである。7 グループの中には、系列間に親子関係がみられグループの中に複数の系列が入るものと、他の系列との間の親子関係が確認できず 1 つの系列のみのものがある。

グループ	桁数	系列	系列の種
1	3	h	495
2	4	a	6174
3	8	c	97508421
	14	d	97755108844221
	20	e	97775551108884442221
	26	f	977775551110888844442221
4	17	k	98765420987543211
	26	g	98876654422099877554332111
5	23	n	98776554210988754432211
	29	o	98777655542110988875444322211
6	9	i	864197532
	18	b	886644219977553312
	27	j	888666444221999777555333112
7	23	p	87765443219997765543222

表 2-3 1 4 系列をまず 7 グループに分類する

(1) 系列間に親子関係があるグループ

グループ 3, 4, 5, 6 に分類した系列は、グループに分類した系列間に親子関係がみられるものである。

① グループ 3

系列 c の種である 97508421 に、 $\frac{m-8}{6}$ 個の 7,5,1,8,4,2 を加えることによって、系列 d, e, f の種が生成される。系列 c を親とし、系列 d, e, f を子とする関係がみられる。これに着目し上記 4 つをグループ 3 に分類する。系列 c, d, e, f の種を並べると、8 桁から始まり 6 桁ごとに新しい種が出現していると考えられる。これを確認するために 32 桁に新系列の種 97777555511108888444422221 が存在すると仮定する。この整数を初期値としてカプレカ変換を実行してみると、たしかに固定点になっていることが確認できる。

8 桁	系列 c の種	97508421
14 桁	系列 d の種	97755108844221
20 桁	系列 e の種	97775551108884442221
26 桁	系列 f の種	977775551110888844442221
32 桁	新系列の種	977777555511110888884444422221
.....		

グループ 3 に属する系列 c, d, e, f はいずれも、それぞれの種となる固定点に α 個の 3,6 と β 個の 9,0 を加えることによって (ここで、 $\alpha + \beta = \frac{m - \text{系列の種の桁数}}{2}$)、系列内の高次桁を生成し、それぞれの系列を形成している。上記で予想した新系列の種に 3,6 や 9,0 を加えた 34 桁の整数を初期値としてカプレカ変換を実行すると、たしかに固定点になっていることが確認できる。

②グループ 4

系列 k の種である 98765420987543211 に、 $\frac{m-17}{9}$ 個の 8,6,4,2,9,7,5,3,1 を加えることによって、系列 g の種が生成され、系列 k と系列 g の間に親子関係が見られる。33 桁までの範囲では、このグループに属する系列は 17 桁と 26 桁しかなく、本当にグループを形成しているかわからない。そのため 35 桁に含まれると予想される新系列の種として 9888766654442209998777555433321111 を予想し、これを初期値にしてカプレカ変換を実施し、たしかに固定点になっていることを確認した。17 桁から 9 桁ごとに系列の種が現れるグループであると予想される。

17 桁	系列 k の種	98765420987543211
26 桁	系列 g の種	98876654422099877554332111
35 桁	新系列の種	9888766654442209998777555433321111
....		

グループ 4 に属する系列 k , g はいずれも、種となる固定点に α 個の 3,6 と β 個の 9,0 を加えることによって (ここで、 $\alpha + \beta = \frac{m - \text{系列の種の桁数}}{2}$)、高次桁を生成し、系列を形成している。上記で予想した新系列の種に 3,6 や 9,0 を加えた 37 桁の整数を初期値としてカプレカ変換を実行すると、たしかに固定点になっていることが確認できる。

③グループ 5

系列 n の種である 98776554210988754432211 に、 $\frac{m-23}{6}$ 個の 7,5,1,8,4,2 を加えることによって、系列 o に種が生成されている。系列 n の種を親に、系列 o の種を子とする親子関係が存在している。グループ 4 と同様に、グループ 5 には 23 桁と 29 桁しかなく、本当にグループを形成しているかわからない。グループ 4 と同様に、35 桁に現れると予想される新系列の種となる 9877765554211109888754444322211 を初期値にしてカプレカ変換を実施し、たしかに固定点になっていることを確認した。23 桁から 6 桁ごとに系列の種が現れるグループであると考えられる。

23 桁	n の種	98776554210988754432211
29 桁	o の種	98777655542110988875444322211
35 桁	新系列の種	9877765554211109888754444322211
....		

グループ 5 に属する系列 n , o もまた、グループ 3, 4 と同様に、種となる固定点に α

個の 3,6 と β 個の 9,0 を加えることによって (ここで、 $\alpha + \beta = \frac{m - \text{系列の種の桁数}}{2}$)、

高次桁を生成し、系列を形成している。35 桁を種とする新系列の場合も、同様のルールで高次桁の固定点が作られる。上記で予想した新系列の種に 3,6 や 9,0 を加えた 37 桁の整数を初期値としてカプレカ変換を実行すると、たしかに固定点になっていることが確認できる。

④グループ 6

系列 i の種である 864197532 に、 $\frac{m-9}{9}$ 個の 8,6,4,2,9,7,5,3,1 を加えることによって、系列 b, j の種が生成されている。グループ 4, 5 と同様に、36 桁に出現すると予想される新系列の種として 8886666444422219999777755533331112 を予想し、これを初期値としてカプレカ変換を実施したところ、たしかに固定点になっている。グループ 6 は 9 桁から 9 桁ごとに現れる。

9 桁	i の種	864197532
18 桁	b の種	886644219977553312
27 桁	j の種	888666444221999777555333112
36 桁	新系列の種	88866664444222199997777555533331112
....		

グループ 6 に属する系列 i, b, j はいずれも、種となる固定点に 3,6 を加えることによって系列内の高次桁の固定点を生成している。36 桁を種とする新系列も同様のルールで高次桁を生成できる。上記で予想した新系列の種に 3,6 や 9,0 を加えた 38 桁の整数を初期値としてカプレカ変換を実行すると、たしかに固定点になっていることが確認できる。

(2) グループの中に系列が 1 つしかないもの

表 2-3 中のグループ 1, 2, 7 に分類した系列 h, a, p は、他の系列との間に親子関係が確認できない。各グループにそうした系列が 1 つずつ入っている。

①グループ 1

Ellis らが発見した系列 h は、495 を h 系列の種として 5,9,4 を加えることによって系列内の高次桁の固定点を生成している。他の系列との関連性が確認できない。

②グループ 2

Ellis らが発見した系列 a は、6174 を系列 a の種として種の桁数字 3,6 を加えることによって a 系列の高次桁の固定点を生成している。この系列も他の系列との関連性が確認できない。

③グループ7

系列 p が含まれる。2－1 節で考察したように、23 桁の種 87765443219997765543222 に 14 個の桁数字 7,7,5,4,3,2,9,9,7,6,5,4,2,2 を加えることによって高次桁の固定点が生成される系列を p とする。これと他系列の関連性を調べる。

系列 i の種 864197532 に 7,7,5,4,3,2,9,9,7,6,5,4,2,2 を加えると系列 p の種になっている。これは、グループ 3 での親系列 c と子系列 d, e, f との関係に依っている。グループ 3 では系列 c の種に 7,5,1,8,4,2 を 1 個、2 個と加えることによって子系列 d, e, f の種が生成されている。この時、系列 c, d, e, f はいずれもそれぞれの種に 3,6 もしくは 0,9 を加えることによって系列内の高次桁を生成している。

系列 i と系列 p を比較すると、系列 i が 3,6 を加えることによって系列内の高次桁を生成したのに対して、系列 p では 7,7,5,4,3,2,9,9,7,6,5,4,2,2 を加えることによって系列内の高次桁を生成している。系列の種同士は似た構造になっているが、高次桁を生成するルールが異なるため、系列 i と系列 p は独立と考える。この他の系列との関係も確認できず、系列 p は他の系列とは独立した系列であると考えられる。

なお、2－1 節で考察したように、系列 p の種 87765443219997765543222 に、7,7,5,4,3,2,9,9,7,6,5,4,2,2 を加えることによって、新系列の種が生成されているとみる見方もある。

23 桁 系列 p の種 87765443219997765543222
 37 桁 系列 q の種 8777765544433221999997776655544322222
 54 桁 系列 m の種
 877777765554444333222199999997777666555544432222222

この場合は、系列 p, q, m が系列内の高次桁を生成するルールは未確認である。あるいはそれぞれ固定点 1 つだけが存在する系列であるかもしれない。

以上をまとめると表 2－4 になる。すなわち、14 系列を 7 つのグループに統合し、グループごとに、①グループ内の親系列の種、②同系列内で高次桁を生成する規則、③グループ内の親系列が子系列を生成する規則をまとめている。

グループ	桁数	系列	系列の種	系列内の高次桁の生成	グループ内の子系列の生成
1	3	h	495	5,9,4	
2	4	a	6174	3,6	
3	8	c	97508421	3,6か0,9	7,5,1,8,4,2
	14	d	97755108844221		
	20	e	9777555110888442221		
	26	f	97775555111088884442221		
4	17	k	98765420987543211	3,6か0,9	8,6,4,2,9,7,5,3,1
	26	g	98876654422099877554332111		
5	23	n	98776554210988754432211	3,6か0,9	7,5,1,8,4,2
	29	o	98777655542110988875444322211		
6	9	i	864197532	3,6	8,6,4,2,9,7,5,3,1
	18	b	886644219977553312		
	27	j	888666444221999777555333112		
7	23	p	87765443219997765543222	7,7,5,4,3,2,9,9,7,6,5,4,2,2	

表 2 - 4 7 グループの特徴

2 - 3. 5 系列群に統合する

表 2 - 4 を見ると、①グループの親系列の種同士を比較すると親子関係が見えるものがある。また、②同系列の中で高次桁を生成するルール、③グループ内の子系列生成ルールは種類がすくなく、これをキーにしてさらに少ないグループに分類する可能性がみえる。

(1) グループ 3, 4, 5 の統合

グループ 4 の親系列 k の種 98765420987543211 は、グループ 3 の親系列 c の種 97508421 に 8,6,4,2,9,7,5,3,1 を加えることによって生成される。グループ 3 の親系列 c はグループ 4 の親系列 k との間にも親子関係がみられる。これを確認するために、さらに 8,6,4,2,9,7,5,3,1 を加えて 26 桁 98876654422099877554332111 の整数を作る。この整数を初期値としてカプレカ変換を実施すると、たしかに固定点になっていることが確認できる。これは新グループの親系列の種と予想される。

8 桁 グループ 3 の親系列 c の種 97508421

17 桁 グループ 4 の親系列 k の種 98765420987543211

26 桁 新グループの親系列の種 98876654422099877554332111

26 桁に出現すると予想される新グループの親系列の種 98876654422099877554332111 に、グループ 3、グループ 4 に属する系列がもつ高次桁の生成則である 3,6 もしくは 0,9 を加え、新グループの親系列の高次桁と考えられる 28 桁の整数を作る。これを初期値としてカプレカ変換を実施するとたしかに固定点になっている。つまり、グループ 3 とグループ 4 はいずれも系列 c の種 97508421 から生成される固定点の集まりであり、同じルールによって新グループが生成されることが確認できる。

次に、グループ 5 の親系列 n の種 98776554210988754432211 はグループ 3 の親系列 c の種 97508421 に 8,7,6,5,4,2,1,9,8,7,5,4,3,2,1 を加えることによって生成される。グループ 4 での議論と同様に、さらに 8,7,6,5,4,2,1,9,8,7,5,4,3,2,1 を加え 38 桁の整数

8877766555442211099888775544433222111 を作る。これを初期値としてカプレカ変換を実行すると、たしかに固定点になっている。

8 桁 グループ 3 の親系列 c の種 97508421

23 桁 グループ 5 の親系列 n の種 **98776554210988754432211**

38 桁 新グループの親系列の種 **98877766555442211099888775544433222111**

加えて、新グループの親系列の種 **98877766555442211099888775544433222111** に、グループ 3, 5 に属する系列が高次桁を生成するルールである 3,6 もしくは 0,9 を加え、40 桁の整数を作る。この整数を初期値としてカプレカ変換を実施すると、たしかに固定点になっている。グループ 3 とグループ 5 はいずれも系列 c の種 97508421 から生成される固定点の集まりであり、同じルールによって新グループが生成されることが確認できる。

以上の考察から、グループ 3, 4, 5 に含まれる系列は、同じ種から一定のルールによって生成され、系列群を作っていると判断する。

(2) 5つの系列群

以上の考察から、256 個の固定点は次の 5 つに分類される。

459 を種とする系列群 h

6174 を種とする系列群 a

97508421 を種とする系列群 c, d, e, f, k, j, c, n

864197532 を種とする系列群 i, b, j

87765443219997765543222 を種とする系列群 p

3 周期 2 のループにあらわれる規則性

第 2 章で固定点を分類した手法を使って、周期 2 以上の数のループを分類し、親となるループとそこから高次桁を生成するルールを探っていく。

32 桁を除く 33 桁までの整数を初期値としてカプレカ変換を実行すると、2558 個の数のループが得られる。到達点としてあらわれる数のループは、周期 1 (固定点)、周期 2、3、4、5、7、8、14 のみで、その他の周期をもつループはあらわれない。

数のループの規則性を見つける難しさは、第一に要素同士を比較する際に、比較するループの要素全てと比較する必要があることにある。たとえば、8 桁に現れる周期 3 の数のループ (86526432, 64308654, 83208762) と、10 桁に現れる周期 3 の数のループ (6431088654, 8732087622, 8655264432) を比較する際には、10 桁の数のループの要

素 6431088654 を、8 桁のループの要素 86526432, 64308654, 83208762 のいずれとも比較をしなければならない。第二に現れる数のループが固定点に比べて圧倒的に多く、多くのループを分類し、規則性を見出す作業が膨大になることである。特に周期 3 のループは上記の桁の範囲でも 2180 個が出現する。

この章では周期 2 のループに現れる規則性について考察する。32 桁をのぞく 33 桁までの整数にカプレカ変換を実行すると、表 3-1 に示す 17 個の周期 2 のループが現れる。表 3-1 中、ループを構成する 2 つの要素を便宜的に第一要素、第二要素としている。

桁数	第一要素	第二要素
5	53955	59994
13	8733209876622	9665429654331
15	873332098766622	966543296654331
16	8764421997755322	8765431997654322
17	87333320987666622	96654332966654331
19	8733333209876666622	9665433329666654331
21	873333332098766666622	966543333296666654331
23	87333333320987666666622	96654333332966666654331
23	87764442219997775553222	87765543319997665443222
25	873333333209876666666622	96654333332966666654331
25	887664442219997775553212	8876654432199977655433212
27	8733333333209876666666622	9665433333329666666654331
29	873333333332098766666666622	966543333333296666666654331
30	87776444422219999777755532222	877765554333199997666544432222
30	877765444322199997776555432222	877765544332199997766554432222
31	87333333333320987666666666622	9665433333332966666666654331
33	8733333333333209876666666666622	966543333333329666666666654331

表 3-1 周期 2 の数のループ

表 3-1 をみると、固定点と同様に、ループの各要素に一定の桁数字を加えることにより高次桁が生成される関係がみられる。たとえば、13 桁の各要素に 3 と 6 を加えることによって 15 桁のループが生成されている。以下、数のループを (8733209876622, 9665429654331) のように (第一要素, 第二要素) と表記する

13 桁 (8733209876622, 9665429654331)

15 桁 (87**3**3320987**6**6622, 96654**3**29**6**654331)

17 桁 (87**33**3320987**66**6622, 96654**33**29**66**654331)

....

この関係に着目し、17 個のループを 5 つの系列に分類する (表 3-2 参照)。

桁数	系列	第一要素	第二要素	系列内の高次桁の生成	
5	2a	53955	59994		
13	2b	8733209876622	9665429654331	3,6	3,6
15		873332098766622	966543296654331		
17		87333320987666622	96654332966654331		
19		8733333209876666622	9665433329666654331		
21		873333332098766666622	966543333296666654331		
23		87333333320987666666622	96654333332966666654331		
25		8733333333209876666666622	9665433333329666666654331		
27		873333333332098766666666622	966543333333296666666654331		
29		87333333333320987666666666622	96654333333332966666666654331		
31		8733333333333209876666666666622	9665433333333329666666666654331		
33		873333333333332098766666666666622	966543333333333296666666666654331		
16	2c	8764421997755322	8765431997654322	7,4,2,9,7,5,2	7,5,3,9,6,4,2
23		877644221999777553222	87765543319997665443222		
30		877764442221999977755532222	877765554333199997666544432222		
30	2d	877765444322199997776555432222	877765544332199997766554432222	7,4,2,9,7,5,2	7,5,3,9,6,4,2
25	2e	8876644422199977755533212	8876654432199977655433212	7,4,2,9,7,5,2	7,5,3,9,6,4,2

表 3-2 周期 2 のループ

表 3-2 の 5 系列の中には、系列 2 a のように高次桁と低次桁のループの間に関係が確認できないループが一つだけ入っているものと、系列 2 b のように関係があるものがある。

(1) 他のループとの関連性が確認できず、1 つのループだけが入っている系列

①系列 2 a

系列 2 a は下のループのみが入る。他のループとの関連が確認できない。

5 桁 (53955, 59994)

(2) 系列の最低次桁のループを種として、各要素に桁数字を加えることにより高次桁のループが生成される系列

①系列 2 b

13 桁のループ (8733209876622, 9665429654331) を種として、各要素に $\frac{m-13}{2}$ 個の

3,6 を加えることによって高次桁のループが生成される。ここで m はループの桁数を表す。13 桁からはじまり、2 桁ごとに現れる系列である。

13 桁 (8733209876622, 9665429654331)

15 桁 (873332098766622, 966543296654331)

17 桁 (87333320987666622, 96654332966654331)

...

②系列 2 c

16 桁のループ (8764421997755322, 8765431997654322) を種として、第一要素には

7,4,2,9,7,5,2 を、第二要素には 7,5,3,9,6,4,2 を、それぞれ $\frac{m-16}{7}$ 個ずつ加えることによっ

て高次桁のループが生成される。16 桁からはじまり 7 桁ごとに数のループが現れる。

16 桁 (8764421997755322, 8765431997654322)
 23 桁 (8776444221999777555322, 8776554331999766544322)
 . . .

③系列 2 d

30 桁のループ (877765444322199997776555432222, 877765544332199997766554432222) は他のループとの関連が見えない。しかし、これを系列 2 c の種 (8764421997755322, 8765431997654322) と比較すると、系列 2 c の種の各要素に 7,7,5,4,3,2,9,9,7,6,5,4,2,2 を加えることで得られることがわかる。これは第 2 章で考察した固定点の系列 p とよく似ている。

系列 p と同様に、さらに 7,7,5,4,3,2,9,9,7,6,5,4,2,2 の桁数字を加え、44 桁の数の組 (87777765555443332199999776666554444322222, 8777776544444322221999997777655554322222) を作る。左の値を初期値としてカプレカ変換を実行すると、たしかに上記の 2 つの数がループを形成していることがわかる。もちろん右の要素を初期値にしても同様の結果が得られる。同様に、さらに 7,7,5,4,3,2,9,9,7,6,5,4,2,2 を加え 58 桁の数の組を作り、それらを初期値としてカプレカ変換を実施、たしかに数のループになっていることを確認した。

つまり、30 桁のループを種として、系列 2 c 種に $\frac{m-30}{14}$ 個の 7,7,5,4,3,2,9,9,7,6,5,4,2,2 を加えて生成される系列

16 桁 (系列 2 c の種) (8764421997755322, 8765431997654322)
 30 桁 (系列 2 d の種) (8777654443221999777655543222, 8777655443321999776655443222)
 44 桁 (新系列の種) (87777765544433221999997776655544322222, 877777655544433322199999777666555444322222)
 58 桁 (新系列の種) (877777765554444333222199999997777666555544432222222, 877777765555444433332221999999977776665555444432222222)

が存在する。

次に系列 2 d の 30 桁のループを種として系列 2 c と同様のルール、すなわち第一要素に 7,4,2,9,7,5,2、第二要素に 7,5,3,9,6,4,2 を加えると、高次桁の数のループを生成することができるかどうかを調べる。37 桁 (8777765444432221999997777655554322222, 8777765554433321999997766655444322222) の数の組を作り、第一要素を初期値にして

カプレカ変換を実行すると、たしかに数のループになっている。さらに第一要素に 7,4,2,9,7,5,2 を、第二要素に 7,5,3,9,6,4,2 を加え 44 桁の数の組を作り、第一要素を初期値としてカプレカ変換を実行すると、たしかに数のループになっていることが確認できる。このように、系列 2 d として

30 桁 (877765444322199997776555432222,
877765544332199997766554432222)
37 桁 (8777765444432221999997777655554322222,
8777765554433321999997766655444322222)
44 桁 (8777776544444322221999997777765555543222222,
8777776555544333321999997766665544443222222)
.....

が生成される。以上から、系列 2 d は系列 2 c を親とする子系列であると判断する。

系列 2 d の規則性に関連して、系列 2 d と固定点の系列 p との類似性を述べる。いずれも 7,7,5,4,3,2,9,9,7,6,5,4,2,2 を加えることによって高次桁を生成し、また系列の種となる整数にも下記のように類似性が見られる。

系列 p の種	87765443219997765543222
系列 2d の種の第一要素	877765444322199997776555432222
系列 2d の種の第二要素	877765544332199997766554432222

④系列 2 e

系列 2 e は系列 2 d と同様に、25 桁 (8876644422199977755533212, 8876654432199977655433212) だけに現れ、他の系列との関係がないように思われる。しかし、上記のループと系列 2 c の種である 16 桁のループ (8764421997755322, 8765431997654322) を比較すると 8,6,4,2,9,7,5,3,1 を加えることによって生成されることがわかる。これを確かめるため、さらに両方の要素に、8,6,4,2,9,7,5,3,1 を加え 34 桁 (888766644442221999977755553332112, 8887666544432219999777655543332112) の数の組を作り、第一要素を初期値としてカプレカ変換を実行したところ、たしかに数のループになっている。同様に 43 桁についても同様のルールにより数のループを生成できる。

このように 16 桁のループを種として、 $\frac{m-16}{9}$ 個の 8,6,4,2,9,7,5,3,1 を加えることによって高次桁が生成されている。

16 桁 (系列 2 c の種)	(8764421997755322, 8765431997654322)
25 桁 (系列 2 e の種)	(8876644422199977755533212, 8876654432199977655433212)

34 桁 (新系列の種) (888766644442221999977775553332112,
8887666544432219999777655543332112)
43 桁 (新系列の種) (88887666644442222199999777775555333321112,
8888766665444432221999997777655554333321112)
.....

さらに、25 桁 (8876644422199977755533212, 8876654432199977655433212) に、
系列 2 c と同様に、第一要素に 7,4,2,9,7,5,2、第二要素に 7,5,3,9,6,4,2 を加え、32 桁
(88776644442221999977775555332212, 88776655443321999977665544332212) をつ
くる。第一要素を初期値としてカプレカ変換を実施すると、たしかにこの数の組がループ
になっていることが確認される。39 桁の数のループも確認できる。

以上から、系列 2 e は系列 2 c を親とする子系列であり、系列 2 c と同じルールで高次
桁が構成される下記の系列であると推測される。

25 桁 (8876644422199977755533212, 8876654432199977655433212)
32 桁 (88776644442221999977775555332212,
88776655443321999977665544332212)
39 桁 (8877766444422221999997777755553322212,
887776655544333219999977666554443322212)
.....

以上から、系列 2 e は系列 2 c の種から生成される系列であり、系列 2 c, 2 d, 2 e
は同じグループに分類され则认为られる。

系列 2 e の規則性に関連し、系列 2 e と固定点の系列 i との関連について述べる。いず
れも 8,6,4,2,9,7,5,3,1 を加えることによって高次桁を生成し、また系列の種となる整数にも
下記のように類似性が見られる。

i の種	864197532
2e の種の第一要素	8876644422199977755533212
2e の種の第二要素	8876654432199977655433212

⑤新系列 2 f

③④で、系列 2 d, 2 e は系列 2 c を親とする子系列であることを示した。その際に系
列 2 c の子系列として、44 桁からはじまる新系列 2 f

(87777765544443322219999997777666555443222222,
87777765554443332219999997776665554443222222)

を予想した。これを種として系列 2 c と同じルール、すなわち第一要素に 7,4,2,9,7,5,2、第二要素に 7,5,3,9,6,4,2 を加え、高次桁を作る。51 桁

(8777777**7**6554444**4**33222**2**1999999**9**7777**7**665555**5**44322222**2**,
8777777**7**6555**5**444333**3**221999999**9**777666**6**555444**4**322222**2**)

の数の組を作り、第一要素を初期値としてカプレカ変換を実施すると、上記の数の組を要素とする数のループが現れる。同様に、58 桁についても確かめられる。

新系列 2 f として

44 桁 (877777765544443322219999997777665555443222222,

87777765554443332219999997776665554443222222)

51 桁 (8777777**7**6554444**4**33222**2**1999999**9**7777**7**665555**5**44322222**2**,

8777777**7**6555**5**444333**3**221999999**9**777666**6**555444**4**322222**2**)

58 桁 (8777777**7**6554444**4**33222**2**1999999**9**7777**7**665555**5**44322222**2**,

8777777**7**6555**5**444333**3**221999999**9**777666**6**555444**4**322222**2**)

.....

が存在する。これは系列 2 c の子系列であり、系列 2 c, 2 d, 2 e, 2 f と同じグループに属する。

以上、系列の種同士の関連性と、系列内の高次桁を生成するルールから周期 2 の数のループを 3 つのグループに分類したものが表 3-3 である。

グループ	桁数	系列	第一要素	第二要素	系列内の高次桁の生成		子系列の生成
1	5	2a	53955	59994			
2	13	2b	8733209876622	9665429654331	3,6	3,6	
	15		873332098766622	966543296654331			
	17		87333320987666622	96654332966654331			
	19		8733333209876666622	9665433329666654331			
	21		873333332098766666622	966543333296666654331			
	23		87333333320987666666622	96654333332966666654331			
	25		8733333333209876666666622	9665433333329666666654331			
	27		873333333332098766666666622	966543333333296666666654331			
	29		87333333333320987666666666622	96654333333332966666666654331			
	31		8733333333333209876666666666622	9665433333333329666666666654331			
	33		873333333333332098766666666666622	966543333333333296666666666654331			
3	16	2c	8764421997755322	8765431997654322	7,4,2,9,7,5,2	7,5,3,9,6,4,2	親系列
	23		877644221999777553222	8776554319997665443222			
	30		877764442219999777755532222	877765554333199997666544432222			
	30	2d	877765444322199997776555432222	877765544332199997766554432222	7,4,2,9,7,5,2	7,5,3,9,6,4,2	7,7,5,4,3,2,9,9,7,6,5,4,2,2
	37		8777765444432221999997777655554322222	8777765554433321999997766655444322222			
	44		877777654444432221999999777765555543222222	8777776555544333219999997766665544443222222			
	25		887664442219997775553212	8876654432199977655433212	7,4,2,9,7,5,2	7,5,3,9,6,4,2	8,6,4,2,9,7,5,3,1
	32	2e	887766444222199997777555332212	88776655443321999977665544332212			
	39		8877766444422221999997777755553322212	887776655544333219999977666554443322212			
	44		87777765544443322219999997777665555443222222	8777776555444333221999999776665554443222222			
	51	2f	8777776554444332221999999777776655554432222222	877777655554443332219999997776666555444432222222	7,4,2,9,7,5,2	7,5,3,9,6,4,2	7,7,5,4,3,2,9,9,7,6,5,4,2,2

表 3－3

表 3－3 のように、系列の種の間の関連性と、系列内の高次桁を生成するルールから、周期 2 の数のループは次の 3 つの系列群に分類される。

1. (53955, 59994) を種とする系列群 系列 2 a
2. (8733209876622, 9665429654331) を種とする系列群：系列 2 b
3. (8764421997755322, 8765431997654322) を種とする系列群：
系列 2 c, 2 d, 2 e, 2 f・・・

4 周期 3 以上のループに現れる規則性

3 章で述べたように、32 桁を除く 33 桁までの範囲では、カプレカ変換の到達点としてあらわれる数のループは、周期 1 (固定点)、周期 2、3、4、5、7、8、14 のみで、この他の周期をもつループはあらわれない。周期 3 以上のループについても、周期 1、周期 2 と同様に、種となるループの各要素に一定の数を加えることによって高次桁が生成される。この章では、周期の長いループについて解析結果を述べる。ただし、周期 3 と周期 5 は次稿でのべる。

(1) 周期 4

周期 4 の数のループは、32 桁を除く 33 桁までの範囲では、表 3－4 に示すように、5 桁に表れる 2 つのみであり、2 つの数のループの間に関係は確認できない。

桁数	第一要素	第二要素	第三要素	第四要素
5	74943	62964	71973	83952
5	63954	61974	82962	75933

表 3－4

(2) 周期 7

周期 7 のループは、上記の範囲では 14 個現れる。これらはすべて、6 桁のループを種

にして、各要素にそれぞれ $\frac{m-6}{2}$ 個の 3 と 6 を加えることによって高次桁を生成する系列に分類される (表 3-5 参照)。

系列	桁数	第一要素	第二要素	第三要素	第四要素	第五要素	第六要素	第七要素
7a	6	860832	862632	642654	420876	851742	750843	840852
	8	86308632	86326632	64326654	43208766	85317642	75308643	84308652
	10	8633086632	8633266632	6433266654	4332087666	8533176642	7533086643	8433086652
	12	863330866632	863332666632	643332666654	433320876666	853331766642	753330866643	843330866652

表 3-5

(3) 周期 8

周期 8 のループは、7 桁と 11 桁それぞれに 1 つずつ現れる (表 3-6 参照)。32 桁を除く 33 桁までの範囲では、他に周期 8 のループは存在しない。2 つのループの間の規則性は確認できない。

桁数	第一要素	第二要素	第三要素	第四要素	第五要素	第六要素	第七要素	第八要素
7	8429652	7619733	8439552	7509843	9529641	8719722	8649432	7519743
11	87331976622	86542965432	76320987633	96442965531	87320987622	96653954331	86330986632	96532966431

表 3-6

(4) 周期 14

周期 14 のループは、9 桁に 1 つだけ現れる。32 桁を除く 33 桁までの範囲ではこの他には現れない。

9 桁 (865296432, 763197633, 844296552, 762098733, 964395531, 863098632, 965296431, 873197622, 865395432, 753098643, 954197541, 883098612, 976494321, 874197522)

5 おわりに

32 桁を除く 33 桁までの整数を初期値として、カプレカ変換を実行し、2558 個の数のループを得た。到達点としてあらわれる数のループは、周期 1 (固定点)、周期 2、3、4、5、7、8、14 のみで、この他の周期をもつループは現れない。

次に、2558 個のループについて周期ごとに桁数字に現れる規則性を探した。低次のループに一定の桁数字を加えることによって高次桁が生成され系列が形成されている。また複数の系列は同じループを種として一定の桁数字を順次加えることによって生成され、系列群を形成している。周期 1 (固定点) では 5 つ系列群に、周期 2 では 3 つの系列群に、周期 7 では 1 つの系列群に分かれる。周期 4 と周期 8 は独立した 2 つのループ、周期 14 は 1 つのループのみが現れている。周期 3、周期 5 は分析の途中である。

桁数字を順次加えることによって高次桁を生成するルールも極めて少ない種類が出現し

た。その種類は下記である。

(1) 全ての要素に同じ桁数字を加えるもの

① 3,6

② 0,9

③ 5,9,4

④ 7,5,1,8,4,2

⑤ 8,6,4,2,9,7,5,3,1

⑥ 7,7,5,4,3,2,9,9,7,6,5,4,2,2

⑦ 8,7,6,5,4,2,1,9,8,7,5,4,3,2,1

(2) 要素ごとに異なる桁数字を加えるもの

① 7,4,2,9,7,5,2 と 7,5,3,9,6,4,2

② 5,4 と 1,8 と 7,2

③ 7,2 と 5,4 と 1,8

周期 3、周期 5 のループは解析の途中である。これらにはたくさんのループが存在し、複雑な親子関係を形成している。これらの解析は、ループに現れる規則性に多くの情報を与えるだろう。また、種から高次桁を生成するルールは、数のループに数にくらべて非常に少なく、周期を超えて共通している。一部の系列は、ルールを共有する別の周期の系列とも関連が見える。これをキーにした解析も実施していきたい。

文献

- 1 平田郁美, 共愛学園前橋国際大学論集, 5(2005)21.
- 2 D. R. Kaprekar, Another Solitaire Game, Scripta Math. 15(1949) 244.
- 3 D. R. Kaprekar, An Interesting Property of the Number 6174, Scripta Math., 21(1955) 304.
- 4 R.W. Ellis and J.R. Lewis, Investigations into the Kaprekar Process, 2002.

Abstract

The Kaprekar Transformation for higher-digit numbers 2

Yumi Hirata

All loops under the Kaprekar transformation up to 33 digits except 32 digits were found. All the 2558 loops are divided into 8 groups, 1-cycle-loop (i.e. fixed point or Kaprekar number), 2, 3, 4, 5, 7, 8 and 14. There is no loop that has other cycles. Each group can be classified into some series. Each of the series has a special loop called the "seed", which generates its series by adding particular digit numbers to itself. Some series have the "parent-child relation" between other series. The seed of the parent series generates the seed of its child by adding particular digit numbers to itself and they form a group of series. One-cycle-loops can be classified into 5 "group of series". In the case of two-cycle-loop, they can be classified into 3 "group of series".